

ВЫПУСК

131



Библиотечка КВАНТ

Библиотечка КВАНТ



КОЛМОГОРОВСКОЙ
ШКОЛЕ – ПЯТЬДЕСЯТ

СБОРНИК СТАТЕЙ

Часть 1



БИБЛИОТЕЧКА
КВАНТ
ВЫПУСК

131

Приложение к журналу
«Квант» №3/2014

Колмогоровской школе – пятьдесят

СБОРНИК СТАТЕЙ

Часть 1

Составители

В.В.Вавилов, В.Н.Дубровский, А.А.Егоров

Москва
Издательство МЦНМО
2014

УДК 51(07)
ББК 22.1-22.3ж 74.04(2)
К60

Серия «Библиотечка «Квант»
основана в 1980 году

Редакционная коллегия:

Б.М.Болотовский, А.А.Варламов, Г.С.Голицын, Ю.В.Гуляев,
М.И.Каганов, С.С.Кротов, С.П.Новиков, В.В.Произволов, Н.Х.Розов,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров, А.Р.Хохлов,
А.И.Черноуцан

К60 Колмогоровской школе — пятьдесят. Сборник статей.
Часть 1. Составители В.В.Вавилов, В.Н.Дубровский, А.А.Егоров. — М.: Издательство МЦНМО, 2014. — 144 с. (Библиотечка «Квант». Вып. 131. Приложение к журналу «Квант» №3/2014.)

ISBN 978-5-4439-0622-5

Книга представляет собой сборник статей математиков — учеников Андрея Николаевича Колмогорова, работавших вместе с ним как в области науки, так и в области образования. В книгу вошли также статьи самого А.Н.Колмогорова, адресованные молодым людям, интересующимся математикой. Тематика статей сборника разнообразна, в них обсуждаются и базовые математические понятия, и более узкие вопросы, подходящие для рассмотрения на занятиях математического кружка.

Книга предназначена для старшеклассников, учителей, руководителей математических кружков, а также для всех, кто интересуется математикой.

ББК 22.1-22.3ж 74.04(2)

ISBN 978-5-4439-0622-5



9 785443 906225 >



ОТ СОСТАВИТЕЛЕЙ

Шестидесятые годы прошлого века ознаменованы бурным развитием математического просвещения в СССР. Во многих городах появились математические классы и школы с математическим уклоном, начали работать математические кружки при университетах и других вузах. Возникла огромная армия энтузиастов – студентов, аспирантов, учителей, преподавателей вузов и ученых, бескорыстно работавших со школьниками. Во всех областях и крупных городах проводились математические олимпиады. В 1961 году прошла первая Всероссийская математическая олимпиада, превратившаяся в 1967 году во Всесоюзную олимпиаду.

Наконец, по предложению крупнейших математиков и физиков – академиков А.П.Александрова, А.Н.Колмогорова, М.А.Лаврентьева, И.К.Кикоина, И.Г.Петровского – было издано постановление правительства СССР об образовании физико-математических школ-интернатов при Московском, Ленинградском, Новосибирском и Киевском государственных университетах.

Весной 1963 года началась подготовка к созданию физико-математической школы (ФМШ) при МГУ. Победители заключительного тура Всероссийской математической олимпиады были приглашены в летнюю школу. Руководил работой летней школы Андрей Николаевич Колмогоров – величайший ученый XX века. После трех недель активных занятий в летней школе 19 лучших ее учеников были зачислены в ФМШ.

Осенью того же года в 49 областях центра России и Белоруссии прошли вступительные экзамены в ФМШ по математике и физике. Для их проведения в областные центры были направлены экзаменационные комиссии, составленные из преподавателей и аспирантов МГУ и МФТИ. Экзаменаторы должны были проверять не формальные умения и навыки школьников, а сообразительность, смекалку, умение решать простые, но нестандартные задачи.

Наконец, после зачисления школьников, рекомендованных экзаменационными комиссиями, в декабре 1963 года начала работу физико-математическая школа-интернат №18 при МГУ – так школа называлась до 1988 года. Ныне это Специализирован-

ный учебно-научный центр (СУНЦ) – физико-математическая школа-интернат имени А.Н.Колмогорова при МГУ или, как ее называют ученики и преподаватели, Колмогоровская ФМШ.

В первые десятилетия существования школы, пока позволяло здоровье, А.Н.Колмогоров руководил ее работой, читал лекции, посещал семинары и другие занятия, устраивал музыкальные вечера, водил школьников и молодых преподавателей в походы, принимал участие в работе летних школ.

В ФМШ работали многие выдающиеся педагоги и ученые. За 50 лет ее закончили более десяти тысяч учеников. Среди выпускников два академика РАН, десять членов-корреспондентов РАН, около 300 докторов наук и более 1000 кандидатов наук.

Часто выпускники становились преподавателями школы, иногда еще до окончания обучения в университете или аспирантуре.

Сейчас Колмогоровская ФМШ – подразделение МГУ на правах факультета. Обучение устроено так же, как и в вузах: лекции, семинары, экзамены. Ученики успешно выступают на математических и физических олимпиадах самого высокого уровня – от Московских и Всероссийских до Международных. Некоторые еще на школьной скамье делают свои первые научные работы.

Выпускники и преподаватели школы – авторы многих научных монографий, учебников для вузов и средней школы, научно-популярных книг и статей во всех существующих в нашей стране научных и научно-популярных журналах. Только в «Кванте» ими опубликовано больше 200 статей. Многие сотрудники Колмогоровской ФМШ в течение сорока лет тесно взаимодействовали с журналом – работали в редакции, состояли и состоят в его редакционной коллегии.

Настоящий сборник (состоящий из двух частей) знакомит вас с очень небольшой частью статей по математике, написанных преподавателями и выпускниками Колмогоровской ФМШ. Естественно, открывают сборник статьи самого Андрея Николаевича Колмогорова и посвященные ему статьи. Остальные статьи содержат сюжеты из самых разных областей математики. Для их понимания, как правило, достаточно познаний в рамках программы средней школы.

Надеемся, что сборник заинтересует и школьников, и учителей, а также просто любителей красивой математики.

А.Н.КОЛМОГОРОВ В ВОСПОМИНАНИЯХ УЧЕНИКОВ

Вспоминает член-корреспондент АН СССР, профессор Владимир Игоревич Арнольд:

– Андрей Николаевич Колмогоров прожил большую и счастливую жизнь. Колмогоров – Пуанкаре – Гаусс – Эйлер – Ньютон: всего пять таких жизней отделяют нас от истоков нашей науки.

Пушкин заметил как-то, что он оказал на юношество и российскую словесность больше влияния, чем все Министерство народного образования, несмотря на полное неравенство средств. Таким же было влияние Колмогорова на математику.

Я познакомился с Андреем Николаевичем в студенческие годы. Тогда он был деканом мехмата. Это были годы расцвета факультета, расцвета математики. Уровня, которого достиг факультет в 50-е–60-е годы благодаря прежде всего Андрею Николаевичу Колмогорову и Ивану Георгиевичу Петровскому, он более никогда не достигал и вряд ли когда достигнет.

Андрей Николаевич был замечательным деканом. Он говорил, что надо прощать талантливым людям их талантливость, и спас не одного из очень известных сейчас математиков от исключения из университета. Снимая буйных студентов со стипендии, этот декан сам же помогал им пережить трудное время...

От других известных мне профессоров Андрея Николаевича отличало полное уважение к личности студента. Он всегда ожидал услышать от ученика что-то новое, неожиданное, и в высшей степени обладал той заразной увлеченностью наукой, которая прежде всего и нужна студентам. «Действительно хорошо преподавать математику, – говорил Андрей Николаевич, – может только человек, который сам ею увлечен и воспринимает ее как живую, развивающуюся науку.»

Менее всего заботясь о формальном совершенстве своих лекций, Андрей Николаевич был замечательным учителем. Мне кажется, он руководствовался в своем преподавании принципами, которые сформулировал Эйнштейн:

«Кажется почти чудом, что современные методы обучения еще

не совсем удушили святую любознательность, ибо это нежное растение требует, наряду со свободой, прежде всего поощрения. Большая ошибка думать, что чувство долга и принуждение способствуют тому, чтобы находить радость в том, чтобы искать и узнавать. Здоровое хищное животное отказалось бы от пищи, если бы ударами бича его заставляли непрерывно есть мясо, особенно если принудительно предлагаемая еда выбрана не им...»

В наш век больших научных коллективов кажется, что пора крупных индивидуальных достижений в науке ушла в прошлое. Для Андрея Николаевича характерны, однако, именно крупные личные достижения.

В развитии каждой области науки можно различить три стадии. Первая стадия – пионерская: прорыв в новую область, яркое и обычно неожиданное открытие, часто опровергающее сложившиеся представления. Затем следует техническая стадия – длительная и трудоемкая; теория обрастает деталями, становится труднодоступной и громоздкой, но зато охватывает все большее число приложений. Наконец, в третьей стадии появляется новый, более общий взгляд на проблему и на ее связи с другими, по-видимому далекими от нее вопросами; делается возможным прорыв в новую область исследований.

Для математических работ Андрея Николаевича Колмогорова характерно то, что он явился пионером и первооткрывателем во многих областях математики: ему принадлежат яркие достижения в теории вероятностей, теории функций, функциональном анализе, топологии, теории дифференциальных уравнений, теории динамических систем, теории турбулентного движения жидкости и т.д. – трудно указать область математического анализа, в которую А.Н.Колмогоров не сделал бы существенного вклада, где бы он не решил старых (порой двухсотлетних) проблем.

Первую свою знаменитую работу – пример ряда Фурье суммируемой функции, расходящегося почти всюду, Андрей Николаевич выполнил в 19 лет. (В качестве курьеза упомяну, что Фреше говорил мне в 1965 году: «О, Колмогоров! Это тот замечательный молодой человек, который построил почти всюду расходящийся ряд Фурье!» Для Фреше все работы Колмогорова по теории вероятностей, динамическим системам, турбулентности имели меньшую цену, чем эта студенческая работа.) Сам Андрей Николаевич всегда высоко ценил «спортивно-математические» достижения и этой первой работой гордился, но самым трудным своим спортивным достижением считал работу о 13-й проблеме Гильберта.

Технического усовершенствования и обобщений построенной теории Андрей Николаевич обычно старался избегать. Зато на третьей стадии работы, когда нужно осмыслить полученные результаты и увидеть новые пути, на стадии создания фундаментальных обобщающих теорий, Андрею Николаевичу принадлежат замечательные достижения.

Среди более чем трех сотен опубликованных им статей имеются исследования по механике, геологии, биологии, кристаллизации металлов, теории стрельбы, теории стихосложения, теории передачи информации, теории автоматов и т.д. В самой математике Андрей Николаевич всегда старался выбирать такие проблемы, решение которых приближает нас к познанию природы и к овладению ее силами. Сам он сказал о своей прикладной деятельности так:

«Занимаясь с некоторым успехом, а иногда и с пользой, довольно широким кругом практических приложений математики, я остаюсь в основном чистым математиком. Восхищаясь математиками, которые превратились в больших представителей нашей техники, вполне оценивая значение для будущего человечества вычислительных машин и кибернетики, я все же думаю, что чистая математика в ее традиционном аспекте еще не потеряла своего законного почетного места среди других наук. Гибельным для нее могло бы оказаться только чрезмерно резкое расслоение математиков на два течения: одни культивируют абстрактные новейшие отделы математики, не ориентируясь отчетливо в их связях с породившим их реальным миром, другие заняты «приложениями», не восходя до исчерпывающего анализа их теоретических основ... Мне хочется подчеркнуть законность и достоинство позиции математика, понимающего место и роль своей науки в развитии естественных наук, техники, да и всей человеческой культуры, способного развивать свою естественную науку в соответствии с этими общими потребностями».

Эти слова Андрея Николаевича о законности и достоинстве позиции математика, вынесенные в 1963 году на обложку посвященного ему номера «Огонька», — его кредо и научное завещание. Актуальность его мыслей и предостережений становится все очевидней по мере того, как сбывается предсказание Лагранжа: «Места по математике в Академии сделаются тем, чем уже стали кафедры арабского языка в университетах...»

Вспоминает доктор физико-математических наук, профессор МГУ Владимир Андреевич Успенский:

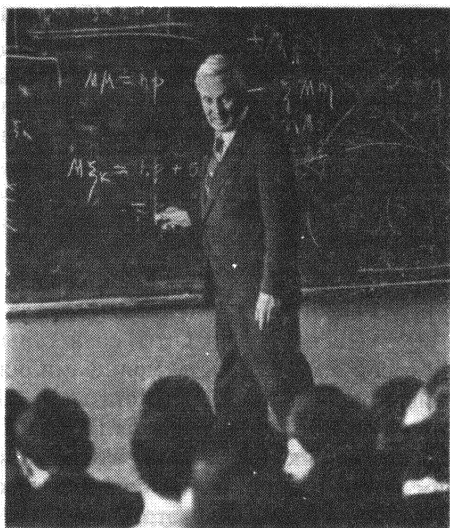
— Еще школьником я узнал, что есть такой математик Колмогоров, и, никогда его не видев и не зная никаких его работ, я уже знал, что самый главный математик, самый великий — это Колмогоров. А потом я участвовал в Московской олимпиаде по математике (скорее всего это была весна 1946 года, когда я учился в 8-м классе), и среди тех, кто приветствовал участников олимпиады, был Колмогоров. На трибуну вышел моложавый человек. На меня произвело очень большое впечатление его выступление: и манера говорить гнусаво, наклонив голову набок к плечу, и текст выступления, который начинался фразой: «Президент Московского математического общества Павел Сергеевич Александров поручил мне приветствовать участников математической олимпиады». Если самый великий математик — Колмогоров, то как же велик тот, кто мог что-то поручить самому Колмогорову?!

Познакомился я с Андреем Николаевичем, когда был на третьем курсе. Он читал специальный курс на мехмате МГУ «Теория меры». На этот спецкурс ходили в основном для удовольствия, так как сдавать этот курс было не нужно. Однажды в перерыве между лекциями я к нему подошел. Мне неловко об этом вспоминать: А.Н. сделал некоторое утверждение, которое я опроверг. На него это произвело впечатление, и он пригласил меня приехать к нему на дачу, спросив, готов ли я только говорить о математике или же могу также кататься на лыжах. Так мы с ним познакомились.

О катании даже и вспоминать не хочется, потому что лыжи просто не держались на мне. До этого я катался на лыжах только в валенках, просовывая носок валенка в петельку, и никаких других креплений просто никогда не видел и не знал, что такие бывают. Андрей Николаевич выдал мне и ботинки, и лыжи, и крепления (жесткие или полужесткие, не помню сейчас). Лыжи постоянно с меня спадали, и академик Колмогоров всякий раз при этом стоял на коленях на снегу, поправляя крепления моих лыж. Первые лыжи уехали от меня совсем под гору, мы вернулись и надели другие. Я в этом, скорее всего, не был виноват, потому что при исправных креплениях лыжи не должны были бы уехать. Это все происходило 22 января 1950 года. С этого времени я стал учеником А.Н.

Работать с А.Н. было очень не просто. Все время ощущалось, что он человек гениальный. В моей жизни было три гениальных человека, с которыми мне довелось общаться, — это Б.Л.Пастернак, А.А.Зализняк и А.Н.Колмогоров. У А.Н. был свой особый стиль. Зимой 1950 года, впервые позвав меня к себе на дачу, он

не без некоторой торжественности произвел меня в свои ученики. Тогда же он назначил тему моих занятий. Он сказал, что бывают такие особенные функции, они называются рекурсивными, и о них в нашей стране почти никто ничего не знает. Дал несколько оттисков статей из иностранных журналов и велел раздобыться. И сказал: «В крайнем случае, если из вас ничего не выйдет, будете делать нам грамотные рефераты». Од-



новременно с этим он подарил мне несколько оттисков своих трудов, один из которых – с дарственной надписью. Это очень ранние и уникальные оттиски 20-х годов, которые я берегу.

В чем проявлялась гениальность А.Н., сказать очень трудно. Но вот могу назвать такие две отличительные его черты. Первая. Будучи аспирантом, я встречался с А.Н. еженедельно. И всякий раз, в каждую последующую встречу, он помнил, на чем мы расстались, и вообще всю мою работу (все, что я сделал до этого) он знал лучше и точнее, чем я. Хотя я занимался только этим, а он, как известно, и многим другим. Вторая черта. Часто одновременно со мной в Комаровку ездил Г.И. Баренблатт, с которым А.Н. занимался гидродинамикой (а со мной – математической логикой). На нас с Баренблаттом производило неизгладимое впечатление, с какой легкостью А.Н. переходил от гидродинамики к математической логике и обратно. Для него это было совершенно естественно. А нам казалось чудом.

Как шла работа? Иногда мы оба с А.Н. рассуждали вслух, а иногда я писал ему тексты, которые и вручал (и которые, как мне теперь хотелось бы надеяться, он просто выбрасывал). Взяв меня в аспирантуру, Колмогоров назначил мне два трудных экзамена по алгебре и по уравнениям математической физики и объявил, что третий экзамен должен быть все же ближе к логике. И велел мне сдавать теорию релейно-контактных схем. Математической литературы по релейно-контактным схемам тогда по-

что не было, а была литература техническая. Поэтому подготовка к этому экзамену давалась мне труднее всего. Помню, что два месяца я не мог понять, как работает триод. И, только все выучив, понял, что это и не надо было понимать. Помимо трех экзаменов полагались еще и аспирантские отчеты. В качестве одного из них А.Н. дал мне для перевода только что вышедшую на немецком языке книгу венгерского математика Розы Петер «Рекурсивные функции». Немецкий язык я не знал, но сказать об этом Колмогорову не решился. Я взялся за работу и... перевел. Книжка получилась неважная, но предисловие, которое написал А.Н., — гениальное.

У меня есть две работы, совместные с А.Н., есть и работа, на которой стоит только моя фамилия, но которая полностью инспирирована А.Н. Это статья в «Докладах Академии наук» про доказательство теоремы Гёделя. Когда А.Н. индуцировал у своего ученика некоторый результат, который на самом деле был им почти подсказан, он создавал такую обстановку, будто бы ученик додумался до этого сам, и предлагал писать статью в журнал о результате. Вот такая психологическая поддержка своего младшего партнера — очень существенный момент его деятельности. Происходило ли это инстинктивно или он это обдумывал, я не знаю.

К сожалению, я, наверное, не могу считать себя полноправным учеником А.Н., потому что не обладал ни одним из двух необходимых для этого качеств: ничего не понимал в музыке и не занимался спортом. Тем не менее, он меня не прогонял. А иногда рассуждал со мной об искусстве, поражая меня своими познаниями во всем. Кто сегодня, например, знает шахматный учебник Дюфрени? Никто. Это известный учебник конца прошлого века. Этот учебник у меня дома был (достался от отца), поэтому я его читал. И когда мы заговорили с А.Н. о шахматах, первое слово, которое он произнес, было «Дюфрень», и он рассказал мне содержание учебника.

Еще такой случай. Для меня было неожиданностью, что на гербе правой и левой стороной считаются не то, что мы видим справа и слева, а наоборот. (Это потому, что герб рисовался на щите и рассматривался с точки зрения того, кто нес щит.) Едва я это узнал, как А.Н. по какому-то поводу об этом упомянул.

Вспоминает доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Математического института Академии наук Альберт Николаевич Ширяев:

— Об Андрее Николаевиче я впервые услышал, конечно, в школе: учительница по математике очень много говорила о нем. Я учился тогда в 538-й московской школе-интернате, и наша учительница подталкивала нас к участию во всевозможных кружках и олимпиадах. При вручении призов на одной из



олимпиад я впервые увидел А.Н. Потом было поступление в университет. Хотя об А.Н. мы слышали и раньше, но общение с ним казалось чем-то недостижимым, нереальным.

Я сначала блуждал по разным кафедрам, и прошло много времени, прежде чем я остановился на кафедре теории вероятности. Впервые некоторое соприкосновение с А.Н. произошло тогда, когда я слушал его курс «Анализ-3». А первый мой разговор с А.Н. произошел, когда я защищал свою дипломную работу. Я ее выполнял между 4-м и 5-м курсами, потому что знал, что в начале 5-го курса мне будет не до дипломной работы, поскольку я входил в студенческую сборную страны по горным лыжам, и в начале февраля 1957 года принял участие во II Зимних студенческих играх в Гренобле.

Защита происходила в конце февраля. После защиты А.Н. вышел со мной в коридор, поговорил со мной о работе, произнес много вещей, которые я не понял. И то ли кто-то сказал ему о моем участии в играх в Гренобле, то ли мой загорелый вид говорил сам за себя, но А.Н. пригласил меня к себе в Комаровку кататься на лыжах.

А.Н. спрашивал о моих математических интересах, но никакого дальнейшего разговора тогда не было. Начиная с 4-го курса я был в спецгруппе, поэтому я никак не мог рассчитывать на работу в Математическом институте. Однако после 5-го курса мы с моим однокурсником Витей Леоновым, к несчастью, рано погибшим, узнали, что А.Н. берет нас по распределению в Математический институт. Мы сразу даже не оценили этого счастья. И тут же началась работа: А.Н. включил нас в исследования по нелинейному спектральному анализу, нелинейной теории случайных процессов. Это были настолько счастливые и

плодотворные годы, что я даже забросил горные лыжи. По поводу одной нашей работы, которая сейчас широко известна и которую мы докладывали с Леоновым, А.Н. с улыбкой сказал, что «авторы преисполнены важности разрабатываемой проблемы».

Когда В.Леонов и я были зачислены в МИАН, А.Н. сразу четко определил наши обязанности. В 1956 году был создан журнал «Теория вероятностей», и определенная работа по журналу была возложена на нас: редактирование, разметка чужих работ. Эта деятельность, хоть и была черновой, явилась для нас хорошей школой. Следующее, что мы должны были делать с Леоновым, – ходить на лекции А.Н., в частности по случайным процессам, и записывать их. Кстати, этими записями его лекций я до сих пор пользуюсь; они остались неизданными. На их приведение в порядок В.Леонов затратил много сил, но когда А.Н. увидел получившийся текст, его комментарий был очень краток: «Боже, какой урод получился!».

Что касается научных исследований о нелинейных случайных процессах, то А.Н. заметил в одной работе Черенкова (сына известного академика) некоторые правила вычисления так называемых семи-инвариантов маленьких порядков. Он решил, что, по-видимому, имеет место некоторое общее правило (для всех порядков), как-то его пояснил и поручил нам его доказать. Ситуация была очень тяжелая. Каждый четверг А.Н. начинал с того, что интересовался, что нами по этому поводу сделано. Мы исписывали фантастическое количество бумаги. И только через год мы доказали сложнейшими комбинаторными путями то, что нужно. А потом мы нашли доказательство, которое уместилось на двух страницах. А.Н. написал введение к этой работе.

Теперь о том, как мы работали. А.Н. так много знал, что мы довольно быстро усвоили правило: не уходить от А.Н. без бумажки, на которой он делал при разговоре пометки. Потом, разглядывая эти бумажки, мы разгадывали их, как ребусы. Часто не покидало ощущение, что он говорит что-то гениальное и по делу, а ты ничего не понимаешь. Магнитофонов тогда не было, а записать все – просто физически не было возможности. И каждый четверг на вопрос А.Н. «что же сделано?» стыдно было отвечать, что ничего, и приходилось не спать, недоедать. Хотя у нас уже начали появляться семьи, мы упорно скрывали это от А.Н.

Даже спустя два года А.Н. создавал такие ситуации, которые были сопряжены с потрясениями. Например, я хорошо помню, как однажды мне позвонили в 9 вечера и сказали, что А. Н.

просит приехать к нему в Комаровку. Часам к 11 я добрался в Комаровку. А.Н. оказался больным. Он сказал, что завтра у него должна состояться лекция, где нужно будет читать теорему Блэкуолла о рекуррентных событиях. А.Н. не хочет, чтобы эта лекция пропусклась, и просит меня ее прочесть. И предложил два варианта: либо он немедленно что-то мне рассказывает по теме лекции, либо дает отписки работы Блэкуолла, в которой я сам должен разобраться. Лекция должна была читаться на первой паре, поэтому у меня была ночь. Блэкуолл писал фантастически сжато. Я поехал домой, просидел всю ночь, прочитал лекцию, а потом вернулся домой спать.

Довольно-таки быстро А.Н. переключил меня на новую тематику. Пришлось изучать книги по радиотехнике, где было описано устройство приемников и ламп, разобраться в принципах радиолокации. Заказчики пришли и объяснили суть задачи. Математическая ее постановка, предложенная А.Н., оказалась удивительно удачной (А.Н. умел так удачно формулировать задачи, что из них потом вырастали совершенно новые направления). Занимаясь этой задачей, я написал свою докторскую диссертацию и книжку по статистическому последовательному анализу.

А.Н. никогда ничего подробно не объяснял. Приходилось до всего доходить самому. Он выдал нам почти инженерную постановку задачи: минимизировать среднее время запаздывания при заданной вероятности ложных тревог. Ответ он, конечно, угадал. А.Н. сказал лишь, что в очень простой ситуации ответ должен быть такой-то, причем его нельзя было получить из какой-либо существующей в то время теории: нам ее просто пришлось придумывать.

А теперь об общей культуре. Поскольку мы были связаны секретарскими обязанностями, лекционной деятельностью, приходилось часто бывать в Комаровке. Ходили в походы, слушали музыку. И в музыке фамиллярничать с А.Н. было невозможно.

Типичный пример. После какого-то вечера, когда было очень много музыки, А.Н. спросил: «Ну, что же еще вам сейчас поставить: Шарпантье или Куперена?». Я сказал: «Андрей Николаевич, может быть, что-нибудь полегче?» А.Н. тут же: «Сейчас я вам «Одинокую гармонию» найду». Мне было невдомек, что А.Н. может что-нибудь знать об этой «Одинокой гармонии». А однажды, слушая музыку, я сидел и постукивал пальцами по столу. А.Н. быстро подложил салфеточку. Я все понял.

Моя деятельность (сначала нелинейные преобразования, потом последовательный анализ) – пример того, как А.Н. с

помощью очень простых формулировок выталкивал людей на самостоятельную орбиту, после чего он считал, что у него есть сотрудники, которые этим занимаются, и знают это лучше него (хотя знать лучше А.Н. можно было только детали, но не общие идеи).

О не математическом общении с А.Н. могу рассказать лишь отдельные эпизоды, отдельные штрихи. Помню такой характерный эпизод. Мы были вместе в Венгрии на конгрессе по теории информации. Получили по 1300 форинтов. Поскольку там нас поили-кормили, у каждого образовалась большая сумма денег. И возник вопрос: что купить? А.Н. сразу спросил про книжный магазин. Пришли туда. Он тут же увидел книгу рисунков Микеланджело, которая стоила 1200 форинтов, купил ее, потратив все что у него было, и сказал: «А билет на трамвай вы уж мне купите».

Впервые со старыми русскими городами я познакомился через А.Н. Иногда ездили в провинциальные русские города, в глубинку. А.Н. о каждом городе многое знал, и цель у него всегда была определенная: он помнил, что здесь нужно посмотреть такую-то стену или башню. Видимо, на память об этих поездках А.Н. подарил мне на сорокалетие толстую книгу «Древнерусские города».

Я никогда не видел, чтобы А.Н. жаловался. Он никогда, ни в какой форме не искал к себе сочувствия. А на вопрос: «Как вы относитесь ко всякому почету, уважению?» – А.Н. отвечал просто: «Спокойно».

Из спортивных увлечений А.Н. стоит отметить греблю и лыжные походы. В равнинных лыжных походах А.Н. проявлял фантастическую ритмичность движений. 30–40 км похода для нас были недостижимой вещью, мукой, а он даже в 60 лет проходил такие расстояния легко.

Вспоминает доктор физико-математических наук, профессор МГУ Владимир Михайлович Тихомиров:

Я познакомился с Андреем Николаевичем на 3-м курсе, в 1955 году. А. Н. был тогда деканом механико-математического факультета, а я – секретарем комсомольской организации своего курса. Однажды произошел инцидент: один из моих товарищей, человек горячий и гордый, не вытерпел оскорбления, которое нанес ему взрослый человек, и ответил очень грубо. Стал разбираться вопрос о пребывании моего товарища в университете. Тогда я и пришел к А.Н. и изложил существо дела. А.Н. довольно резко сказал, что это, конечно, безобразный поступок,

который требует самого сурового осуждения. Я старался защитить своего друга и говорил, что он, разумеется, виноват, но все товарищи знают его как хорошего и способного человека, и потому не следует его отлучать от университета. Андрей Николаевич повторял свои слова осуждения, но когда мне уже казалось, что дело окончательно проиграно, он вдруг сказал: «Ну, мы его, конечно, не исключим». Андрей Николаевич всегда верил в доброе начало в человеке. Он поддерживал многих, и почти во всех случаях те, кому он оказал поддержку, заняли достойное место в науке.

А.Н. никогда мне не ставил персональных задач. Я участвовал в семинаре А.Н. На нем А.Н. предлагал задачи как бы всем. Одна из них мне показалась очень интересной. После того как я решил ее, Андрей Николаевич стал обсуждать со мной перспективы дальнейшей работы. Часть задач предлагал я, и А.Н. одобрял меня, по поводу другой части высказывал свои сомнения, предлагал множество своих задач в развитие всей тематики. Он как бы приоткрывал завесу и показывал отдаленную перспективу, где виделись и конкретные цели и открывался путь, не имеющий конца.

Однажды А.Н. сказал мне: «Вы не должны иметь обо мне представление как о человеке, который знает только математику; я принадлежу к тем людям, кто имеет собственное мнение более или менее по любому вопросу». Я знал всегда, что А.Н. – математик исключительной широты, но не мог и подозревать, в какой мере безграничным является его кругозор в философии, экономике, политике, географии, в вопросах, связанных с искусством и литературой. Он был при этом очень самобытен, почти всегда непредсказуем. В частности, в своих пристрастиях. Как-то зашла речь о крупнейших писателях XX века. Я задумался и стал перебирать наиболее «престижные» тогда (в середине пятидесятих) имена – Горький, Шолохов, Фолкнер, Роллан, Хемингуэй, Ремарк... Андрей Николаевич без колебаний вершинами мировой литературы нашего века назвал творчество А.Франса и Т.Манна, и это было для меня совершенно неожиданно. А когда речь зашла о поэзии, А.Н. также непредсказуемо для меня выделил 24-летнего тогда Евтушенко.

А.Н. был страстным и неутомимым лыжником, очень любил дальние лыжные переходы. Как-то он попросил пригласить к нему с нашего курса кого-нибудь из сильных лыжников, чтобы сделать особенно дальний переход. На нашем курсе был студент с первым юношеским разрядом, ему передали просьбу А.Н., тот

с удовольствием согласился. Поначалу наш сокурсник резвился, убегал, поджидал А.Н., потом уже шел рядом, берег силы, а в конце А.Н. просто нес его лыжи: в долгих лыжных походах (особенно без большой тренировки) иногда наступает такой момент, когда человек еще кое-как может ковылять пешком, а на лыжах идти уже не в состоянии.

Вспоминает кандидат педагогических наук, заведующий сектором НИИСиМО Александр Михайлович Абрамов:

– Заочно я познакомился с Андреем Николаевичем, когда учился в седьмом классе. Я прочитал его брошюру «О профессии математика». Написана она и доступно, и ярко, поэтому хорошо помню свои впечатления и даже отдельные задачи. А первая встреча произошла в 1963 году, когда А. Н. вручал грамоты призерам Всероссийской олимпиады.

В том же году была организована сначала первая летняя математическая школа в Красновидово, а затем и ФМШ при МГУ. Мы, ученики самого первого выпускного класса, считали, что нам невероятно повезло: и в летней школе, и в ФМШ А.Н. был нашим учителем. Да и он сам, по-видимому, испытывал особые чувства к первым 19-ти выпускникам ФМШ – спустя многие годы он помнил всех.

В студенческие годы, учась на мехмате МГУ, я работал в интернате преподавателем математики и довольно часто встречался с А.Н. Но все же было полной неожиданностью, когда перед распределением он предложил мне профессионально заниматься школьными проблемами и стать его аспирантом. Естественно, я сразу согласился. Событием было и первое посещение Комаровки.

Свою первую научную работу я выполнил в университете под руководством В.М.Тихомирова. Так что в известной мере с характером школы А.Н. я был знаком, и это оказало большую помощь.

Хотя мне предстояло работать над педагогической диссертацией, тема требовала главным образом размышлений в сфере математики. А.Н. кратко поставил задачу: дал список аксиом евклидовой планиметрии, положенной им в основу школьного курса геометрии, и сказал, что надо на их основе дать точное изложение геометрии, исследовать аксиоматику. Каких-либо инструкций (например, как выстраивать последовательность теорем) и подсказок не было. А.Н. выделил только наиболее интересующий его результат – теорему об измерении углов – и

указал несколько работ, которые полезно прочитать.

Таким образом, он предоставлял полную свободу. И дело ограничивалось очень краткими обсуждениями. Но окончательные результаты А.Н. контролировал, внимательно знакомился с итоговым текстом.

Позднее мы много работали над школьными учебниками. Было несколько периодов по 3–4 месяца ежедневной работы при подготовке очередных изданий. А.Н. очень тщательно следил за текстом. Когда его что-то не удовлетворяло (а это происходило постоянно, вплоть до стадии корректуры), рассматривались многие варианты. В итоге возникали горы черновиков.

На мой взгляд, главное, что давал А.Н. как учитель, научный руководитель, это увлеченность делом и веру в собственные силы. Он умел сделать так, что ученик вырастал много выше того потолка, который сам себе отмерял. Как-то стыдно было не выполнить задания, которое давал А.Н. Может быть, поэтому удавалось сделать многое из того, что ранее казалось невозможным. Очень важно иметь такой пример перед глазами – для А.Н., кажется, не было задач, которые нельзя решить, он все знал.

Мне кажется, что А.Н. в какой-то момент своей жизни (очевидно, в ранней юности) решил, что человек просто обязан быть счастлив и для этого ему нужно то-то и то-то. При этом необходимо, чтобы все виды деятельности, которые выбирает себе человек, его по-настоящему увлекали. И А.Н. удалось построить свою жизнь таким образом: его творческие достижения необычайны, он очень многое умел ценить – любил человеческое общение, природу, музыку, литературу...

Внешне рациональная, размеренная, его жизнь была внутренне динамична, наполнена и интересом ко всему сущему, и глубокими переживаниями. Однажды А.Н. заметил, что по его мнению каждый человек, начиная с определенного момента, продолжает как бы оставаться в том возрасте, для которого наиболее характерно свойственное этому человеку мироощущение. На прямой вопрос: «А вам сколько лет, Андрей Николаевич?» – он ответил: «Четырнадцать».

Публикацию подготовил А.Сосинский

БЕСЕДА С АНДРЕЕМ НИКОЛАЕВИЧЕМ КОЛМОГОРОВЫМ

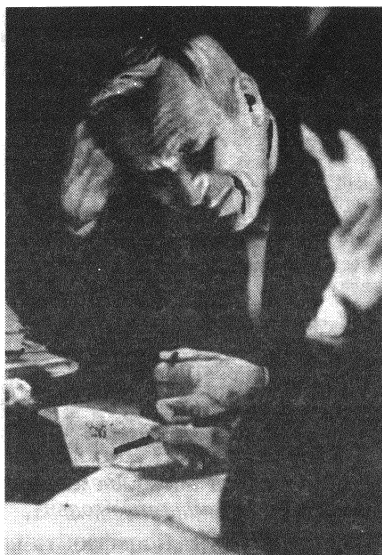
Мы находимся в старом деревянном доме в деревне Комаровка под Москвой, где Андрей Николаевич обычно проводит конец недели. Светлая, скромно обставленная комната. В одном из углов старый, но качественный проигрыватель со специальными полками для пластинок. Стены заставлены стеллажами с книгами. В середине комнаты большой стол с множеством книг, оттисков статей, рукописей, художественных альбомов. Андрей Николаевич сидит у окна за небольшим письменным столом. Рядом с пишущей машинкой и аккуратно сложенными исписанными листами бумаги стоит магнитофон, на который записывается наша беседа. Стенограмму этой беседы мы и предлагаем вашему вниманию.

— **Андрей Николаевич, часто приходится слышать о возрастающей специализации науки. В то же время известно, что вы занимались такими далекими друг от друга областями математики, как теория вероятностей и алгебраическая топология, математическая логика и теория динамических систем. В чем, по-вашему, будущее науки — в универсальности или специализации?**

— Математика велика. Один человек не в состоянии изучить все ее разветвления. В этом смысле специализация неизбежна. Но в то же время математика — единая наука. Все новые и новые связи возникают между ее разделами, иногда самым непредвиденным образом. Одни разделы служат инструментами для других разделов. Поэтому замыкание математиков в слишком узких пределах, должно быть, губительно для нашей науки. Положение облегчается тем, что работа в области математики, в принципе, коллективна. Должно быть некоторое количество математиков, которые понимают взаимные связи между самыми различными областями математики. С другой стороны, можно работать с большим успехом и в какой-нибудь совсем узкой ветви математики. Но в этом случае надо еще, хотя бы в общих чертах, понимать связи между своей специальной областью исследования с областями смежными, понимать, что, по существу, научная работа в математике — коллективная работа.

— Что вы можете сказать о соотношении и связях прикладной и чистой математики?

— Прежде всего, нужно заметить, что само различие между прикладной и чистой математикой чрезвычайно условно. Вопросы, которые, казалось бы, принадлежат к чистой математике и не имеют применений, очень часто совершенно неожиданно оказываются важными для разных приложений. С другой стороны, занимаясь прикладной математикой, ученый почти неизбежно наталкивается на смежные вопросы, решаемые теми же методами,



привлекающие его своей логической красотой, но, собственно говоря, непосредственных приложений уже не получающие. Вероятно, в практической работе математика нужно проявлять должную широту. Несомненно, что математики должны, это их долг, заниматься всеми теми вопросами, которые действительно навязываются вопросами практики. Если смежные вопросы, пусть сразу применений не имеющие, являются привлекательными хотя бы в силу красоты и естественности возникающих задач, ими, конечно, тоже нужно заниматься.

— Норберт Винер пишет в своей автобиографической книге, что перестал заниматься функциональным анализом, когда почувствовал, что «Колмогоров наступает мне на пятки». А как вы относитесь к конкуренции в математике?

— Заявление Винера мне не совсем понятно. В функциональном анализе я сделал немного. Самая интересная моя работа по функциональному анализу называется «Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве».

Что касается конкуренции, то конкуренция может быть дружеской, тогда она мало отличается от сотрудничества. Тесное сотрудничество, когда два математика одновременно и параллельно думают над одной и той же проблемой, порой бывает очень продуктивным. Но при этом иногда бывает и так, что участие одного из сотрудников практически оказывается излишним и



А.Н.Колмогоров и П.С.Александров в Комаровке (семидесятые годы)

тогда ему разумно без обиды отойти в сторону.

— Всегда ли математика была вашим основным увлечением? Когда вы окончательно выбрали математику как профессию?

— Нет, как это часто бывает, пути моего развития были более извилистыми. С раннего детства было известно, что я умею хорошо считать и что меня интересуют математические задачи арифметического характера; я сравнительно рано познакомился и с начала-

ми алгебры. Но все это относится к очень раннему возрасту. Несколько позднее, в средних классах школы, победили уже совсем другие увлечения — в частности, историей. Возврат к математике произошел в самых последних классах средней школы. Когда я кончил среднюю школу, то долго колебался в выборе дальнейшего пути. В первые студенческие годы, кроме математики, я занимался самым серьезным образом в семинаре по древнерусской истории профессора С.В.Бахрушина. Не бросал мысль о технической карьере, почему-то меня увлекала металлургия, и, параллельно с университетом, я поступил на металлургическое отделение Химико-технологического института им. Менделеева и некоторое время там проучился. Окончательный выбор математики как профессии, собственно говоря, произошел, когда я начал получать первые самостоятельные научные результаты, т.е. лет с восемнадцати-девятнадцати.

— Когда обычно проявляются способности к математике? Всегда ли, как у вас, в раннем возрасте?

— Я довольно много преподавал в средней школе. У меня сложилось такое впечатление, что интерес к математике в средних классах, в возрасте двенадцати-тринадцати лет, часто оказывается временным и совсем проходит к старшим классам. Особенно часто это бывает у девочек. С теми школьниками, которые увлечены математикой в возрасте 13–14–15 лет, по-моему, стоит

работать. При умелом культивировании их способности постепенно развиваются и, как правило, уже не теряются. Бывает, конечно, и очень много исключений. Разумеется, серьезный интерес к математике может проявиться и позже.

— Какие математики старшего поколения оказали на вас наибольшее влияние?

— В студенческие годы я был учеником Николая Николаевича Лузина. Кроме него большое влияние оказали на меня Вячеслав Васильевич Степанов, Александр Яковлевич Хинчин, Павел Сергеевич Александров и другие математики их поколения.

— Что вам хотелось бы сказать о своих учениках и кого из них вы хотели бы упомянуть?

— Мне повезло на талантливых учеников. Многие из них, начав работу вместе со мной в какой-нибудь области, потом переходили на новую тематику и уже совершенно независимо от меня получали замечательные результаты. Выделить из них наиболее заслуживающих упоминания было бы трудно.

Скажу только в виде шутки, что в настоящее время один из моих учеников управляет земной атмосферой, а другой — океанами¹.

— Андрей Николаевич, каков ваш режим дня?

— Естественно, в течение моей достаточно длинной жизни режим дня в разные ее периоды был различным. Опишу, пожалуй, только тот режим дня, который мы с Павлом Сергеевичем Александровым установили для себя на те 3–4 дня в неделю, которые мы проводили за городом, под Москвой, в деревне Комаровка.

День начинался в 7 часов утра. Первый час был посвящен гимнастике, пробежке. В 8 часов мы завтракали и принимались за работу за столом — с пишущей машинкой или без нее. В час или два часа дня был полдник, состоящий из молока или кефира с хлебом. После полдника мы еще немного работали, но обычно отправлялись на большую прогулку пешком или — зимой — на лыжах, до 4 часов дня. Потом на полчаса мы укладывались спать. В 5 часов был обед. После обеда мы иногда еще занимались работой, обычно — второстепенной: переписывание или тому подобное. Вечер посвящался чтению, музыке, приему гостей. Перед сном мы любили еще делать небольшую прогулку. Укладывались спать около 10 часов.

¹ Речь идет об академике А.М.Обухове, директоре Института физики атмосферы АН СССР, и об академике А.С.Монине, директоре Института океанологии АН СССР. (Прим. редакции.)

Но, конечно, когда работаешь и начинает получаться решение какой-либо важной проблемы, все отступает на задний план, никакого распорядка дня уже не бывает.

— Вы, как и многие математики, любите серьезную музыку. Расскажите, почему.

— Ваше замечание о многих математиках, увлекающихся серьезной музыкой, мне кажется правильным. Если прийти в концертный зал, особенно в Малый зал Московской консерватории, то вы там увидите непропорционально много математиков. По-видимому, между математическим творчеством и настоящим интересом к музыке имеются какие-то глубокие связи. Но выяснить и объяснить эти связи мне представляется довольно трудным. Замечу, впрочем, что мой друг Павел Сергеевич Александров рассказывал, что у него каждое направление математической мысли, тема для творческих размышлений, связывалась с тем или иным конкретным музыкальным произведением.

Среди любимых композиторов назову, в первую очередь, Моцарта, Шумана, ну и, конечно, величайших музыкантов — Баха, Бетховена.

— Лингвисты и литературоведы обратили внимание на ваши публикации по стиховедению. Что вы можете сказать об этом — менее обычном — сочетании: математика и поэзия?

— Мне хотелось бы разделить этот вопрос на два, так как мое увлечение поэзией имеет такой же произвольный, стихийный характер, как и у людей, не занимающихся теоретическим исследованием стиха. Любимые мои поэты — это Тютчев, Пушкин, Блок. Что же касается моих научных работ по метрике и ритмике русского стиха, то они действительно обратили на себя внимание специалистов-литературоведов, но все-таки это довольно специальная область исследования, интересоваться которой совершенно не обязательно всякому.

— Занимаетесь ли вы спортом? Каким?

— Состязательным спортом я никогда не занимался. Если не ошибаюсь, я только три раза в жизни участвовал в гонке на 10 км на лыжах.

Но я всегда очень любил большие прогулки пешком и на лыжах, совершал длинные путешествия на байдарке или на лодке. Очень люблю плавание, походы в горах. Во всех этих занятиях я ценю не только их пользу для здоровья, но ту радость общения с природой, которую они приносят.

Всегда любил купание в морском прибое. В солнечные мартовские дни люблю делать большие лыжные пробеги в одних шортах. Во время таких мартовских лыжных пробегов люблю

выкупаться посреди сияющих на солнце сугробов в только что вскрывшейся ото льда речке. Впрочем, я не советую обязательно подражать мне во всем этом – можно просто записаться в какую-нибудь привлекающую вас спортивную секцию.

– Андрей Николаевич, что бы вы хотели пожелать нашим читателям?

– Я сам являюсь ученым, и, конечно, в первую очередь, я желаю нашим читателям внести тот или иной вклад в науку, большой или хотя бы маленький. Замечу, moreover, что в случае если все наши читатели принялись бы писать самостоятельные научные работы, то научные журналы не выдержали бы такого натиска. Поэтому я выскажу и более скромное пожелание – чтобы школьное увлечение математикой пригодились вам и в дальнейшей жизни. В «Кванте» мы как раз стараемся вам показать (может быть, и недостаточно), как разнообразны приложения математической науки.

Беседу записал А. Сосинский

А. Колмогоров

1. Значение математических методов в таких науках, как механика, физика или астрономия, хорошо известно. Также всем известно и то, что математика необходима в практической работе инженеров и техников. Элементарные знания по геометрии, умение пользоваться буквенными формулами необходимо почти каждому мастеру или квалифицированному рабочему. Но менее ясным для многих является вопрос о том, что значит иметь специальность математика и заниматься самой математикой в качестве основной профессии.

Очень многие представляют себе дело так, что в учебниках и математических справочниках собрано уже вполне достаточно формул и правил для решения всевозможных встречающихся на практике математических задач. Даже очень образованные люди часто спрашивают с недоумением: разве в математике можно сделать что-либо новое?

Поэтому и математика иногда представляют себе как скучного человека, выучившего большое число формул и теорем, и считают, что его задача состоит в том, чтобы заученные, готовые знания передать другим.

Во всем этом верно только то, что математические сведения, сообщаемые в средней школе и на первых ступенях изучения математики в высшей школе, добыты человечеством давно. Но даже и эти простейшие математические сведения могут применяться умело и с пользой только в том случае, если они усвоены творчески, так, что учащийся видит сам, как можно было бы прийти к ним самостоятельно. От преподавателя математики и в высшей и в средней школе требуется не только твердое знание преподаваемой им науки. Хорошо преподавать математику может только человек, который сам ею увлечен и воспринимает ее как живую развивающуюся науку. Вероятно, многие учащиеся средней школы знают, насколько увлекательной и, благодаря этому, легкой и доступной становится математика у таких преподавателей.

Из книги: А.Н.Колмогоров. О профессии математика. М., Издательство МГУ, 1959. Опубликовано в «Кванте» №4 за 1973 г.

Еще в большей степени самостоятельность и способность по-новому подойти к математической формулировке задачи необходимы тому, кто применяет математику в решении технических проблем. Это относится к работе каждого инженера. Но так как требующиеся при этом математические знания и способности имеются не у всех, то большинство наших научно-исследовательских технических институтов и даже некоторые крупные заводы стали усиленно привлекать специалистов-математиков для работы вместе с инженерами над техническими проблемами.

Ошибочным является представление о математике как о науке законченной, раз навсегда построенной в своих теоретических основах. В действительности математика обогащается совершенно новыми теориями и перестраивается в ответ на новые запросы механики (нелинейные колебания, механика сверхзвуковых скоростей), физики (математические методы квантовой физики) и других смежных наук. Кроме того, и в недрах самой математики после накопления большого числа разрозненных специальных задач, решенных частными приемами, создаются новые общие теории, освещающие эти задачи с иных точек зрения и позволяющие решать их однообразными методами. Например, методы возникающего на наших глазах «функционального анализа» относятся к математическому анализу (который был создан еще в XVII—XVIII вв. и преподается во всех высших технических заведениях) примерно так, как относится алгебра к арифметике. Так называемые «операторные методы» функционального анализа уже нашли широкое применение в современной физике и технике.

В настоящее время особенно не хватает математиков, способных руководить большими вычислительными работами.

Имеется много задач, в которых для получения числового результата требуются вычисления, превосходящие возможности одного человека. Расчет упругих напряжений в плотинах, фильтрация воды под плотинами, сопротивлений, испытываемых самолетами при полете, или траекторий снарядов — вот типичные примеры таких задач. Уже давно при научных институтах, проектных организациях и заводах, нуждающихся в решении подобных задач, стали возникать вычислительные бюро со многими десятками инженеров-вычислителей, оборудованные арифмометрами и вычислительными автоматами, требующими для выполнения арифметических действий над многозначными числами лишь набора их при помощи клавиш и нажатия соответствующей кнопки (+, −, ×, :). Однако современные наука и техника сталкиваются с такими задачами, которые при этом

уровне организации вычислительных работ требуют многих месяцев, а иногда и лет работы десятков вычислителей. Такое положение вызвало бурное развитие современной «машинной математики».

Конструирование и обслуживание современных вычислительных машин превратились в широкие инженерные специальности, которые студенты получают на соответствующих отделениях технических вузов. Для работы в вычислительных бюро старого типа или для введения данных в современную вычислительную машину достаточно общего среднего образования и полугодового производственного обучения. Для того чтобы довести решение математических задач до этапа, после которого они могут быть переданы в вычислительное бюро или на вычислительную машину для получения численных результатов, необходимо много людей с глубокими математическими знаниями.

Теория «вычислительных методов» математики развилась сейчас в большую науку, и потребность в специалистах, владеющих этими методами, с развитием «машинной математики» возрастает. Перед нами возникают своеобразные задачи «программирования», т.е. приведения процесса вычислений к виду, допускающему полную автоматизацию решения задач определенного типа на машинах.

2. Как и всякая наука, математика требует прежде всего твердого знания того, что по исследуемому вопросу уже сделано. Но не следует думать, что в математике труднее, чем в других науках, добраться до возможности сделать что-либо новое. Опыт говорит скорее о другом: способные математики, как правило, начинают самостоятельные научные исследования в очень молодом возрасте. Если математические открытия, сделанные в 16- или 17-летнем возрасте, являются все же исключениями, собираемыми с особой тщательностью в популярных книгах по истории математики, то начало серьезной научной работы в 19—20 лет на средних курсах университетов достаточно типично для биографий многих наших ученых. Академик С.Л.Соболев в 1933 году в возрасте 25 лет был уже избран членом-корреспондентом АН СССР. В 1953 году членом-корреспондентом АН СССР стал 25-летний математик С.Н.Мергелян.

Конечно, широта постановки задач приходит обычно несколько позднее, но при решении отчетливо поставленных трудных конкретных задач совсем молодые люди часто с успехом соревнуются со сложившимися известными учеными.

В основе большинства математических открытий лежит какая-либо простая идея: наглядное геометрическое построение,

новое элементарное неравенство и т.п. Нужно только применить надлежащим образом эту простую идею к решению задачи, которая с первого взгляда кажется недоступной. Поэтому вовсе не существует непроходимой стены между самыми новыми и трудными оригинальными математическими исследованиями и решением задач, доступных способному и достаточно упорному начинающему математику. Интересно с этой точки зрения прочитать некоторые главы из «Математической автобиографии» знаменитого советского алгебраиста Н.Г.Чеботарева², где автор излагает историю своих научных поисков, начиная с первых опытов гимназиста до крупнейших открытий в алгебре.

Сейчас, когда сотрудничество между математиками и представителями смежных специальностей развивается особенно широко, можно определенно сказать, что наиболее успешным оно оказывается при условии, если математик не ограничивается ролью исполнителя сделанного ему «заказа», а старается проникнуть в существо естественнонаучных и технических проблем. Специалисты по математической и теоретической физике, теоретической механике или теоретической геофизике могут подготавливаться двумя путями: начинать свое образование с изучения физики, механики или геофизики, или же сначала изучать математику на математических отделениях университетов, а потом основательно входить в ту или иную область применения математики.

Существует даже такая точка зрения, что второй путь дает лучшие результаты, т.е. что изучить на солидной математической основе аэромеханику, газовую динамику, сейсмологию или динамическую метеорологию легче, чем специалисту в какой-либо из этих областей восполнить недостаток математической подготовки. Такое мнение можно считать слишком крайним и заметить, например, что хорошее владение экспериментальной техникой встречается у математиков, перешедших на работу в какой-либо смежной области, лишь как редкое исключение. Но нельзя не признать, что из математиков по образованию вышло много крупнейших наших специалистов в смежных науках.

Трудно отделить математику от механики и сейсмологии в работах академиков М.А.Лаврентьева и С.Л.Соболева. В первую очередь как механики известны академики М.В.Келдыш, Л.И.Седов и чл.-кор. АН СССР Л.Н.Сретенский; как геофизи-

² Опубликовано в журнале «Успехи математических наук», т. II, вып. 3 (1948).

ки — члены-корреспонденты АН СССР А.Н.Тихонов и А.М.Обухов; как специалист по теоретической физике — академик Н.Н.Боголюбов. Между тем все они окончили университеты в качестве математиков.

Можно было бы указать много связанных с именами математиков конкретных достижений в естествознании и технике, которые оказались весьма существенными с непосредственно практической стороны.

3. Необходимость специальных способностей для изучения и понимания математики часто преувеличивают. Впечатление исключительной трудности математики иногда создается ее плохим, чрезмерно формальным изложением на уроке. Обычных средних человеческих способностей вполне достаточно, чтобы при хорошем руководстве или по хорошим книгам не только усвоить математику в объеме средней школы, но и разобраться, например, в началах дифференциального и интегрального исчислений. Тем не менее, когда дело идет о выборе математики в качестве основной специальности, вполне естественно желание проверить «математическую одаренность». Ведь несомненно, что разные люди воспринимают математические рассуждения, решают математические задачи или — на более высокой ступени — приходят к новым математическим открытиям с разной скоростью, легкостью и успехом. И, конечно, следует стремиться к тому, чтобы из миллионов нашей молодежи специалистами-математиками становились именно те, кто в этой области будут работать наиболее успешно.

Поэтому содействие выдвижению математически одаренной молодежи является одной из важных задач школьных математических кружков, математических олимпиад и других мероприятий по пропаганде математических знаний и распространению интереса к самостоятельным занятиям математикой. Не следует спешить с чрезмерно ранним созданием для отдельных молодых людей репутаций «математических талантов». Но вовремя подтолкнуть способных математиков в сторону выбора математики в качестве своей дальнейшей работы советом или премированием на олимпиаде необходимо.

В чем же заключаются эти способности? Следует прежде всего подчеркнуть, что успех в математике меньше всего основан на механическом запоминании большого числа фактов, отдельных формул и т.п. Хорошая память в математике, как и во всяком другом деле, является полезной, но никакой особенной, выдающейся памятью большинство крупных ученых-математиков не обладало.

В частности, фокусники, запоминая длинные ряды многозначных чисел и складывающие или перемножающие их в уме, совсем не могут служить примером людей с хорошими математическими способностями в серьезном смысле слова.

Способность производить алгебраические вычисления, т.е. умелое преобразование сложных буквенных выражений, нахождение удачных путей для решения уравнений, не подходящих под стандартные правила и тому подобное, уже ближе соприкасается с теми способностями, которые часто требуются от математика в серьезной научной работе.

Принято даже думать, что исключительно большое развитие таких вычислительных или, как иногда говорят, «алгоритмических» способностей, является характерным для одного из нескольких основных типов математической одаренности. Такого рода способности требуются, чтобы преодолеть трудности школьной алгебры, и прежде всего — в разложении алгебраических выражений на множители.

Далее основной областью применения этого рода способностей становится решение уравнений. Однако везде, где это возможно, математики стремятся сделать изучаемые ими проблемы геометрически наглядными. В средней школе достаточно ясно видно, насколько полезны графики для изучения свойств функций. Поэтому читатель не удивится утверждению, что геометрическое воображение, или, как говорят, «геометрическая интуиция» играет большую роль при исследовательской работе почти во всех разделах математики, даже самых отвлеченных.

В школе обычно с большим трудом дается наглядное представление пространственных фигур. Надо, например, быть уже очень хорошим математиком, чтобы, закрыв глаза, без чертежа, ясно представить себе, какой вид имеет пересечение поверхности куба с плоскостью, проходящей через центр куба и перпендикулярной одной из его диагоналей. Искусство последовательного, правильно расчлененного логического рассуждения является также существенной стороной математических способностей.

В школе для развития этой способности служит систематический курс геометрии с ее определениями, теоремами и доказательствами. Но часто наибольшую трудность для школьников в отношении понимания точного смысла сложной логической конструкции представляет принцип математической индукции, изучаемой в конце курса алгебры. Многие не в состоянии ясно увидеть реальное содержание этого принципа за нагромождением слов «если» и «то».

Понимание и умение правильно применять принцип математической индукции является хорошим критерием логической зрелости, которая совершенно необходима в математике.

Способность последовательно, логически рассуждать в незнакомой обстановке приобретаетсЯ с трудом. На математических школьных олимпиадах самые неожиданные трудности возникают именно при решении задач, в которых не предполагается никаких предварительных знаний из школьного курса, но требуется правильно уловить смысл вопроса и рассуждать последовательно. Уже такой шуточный вопрос затрудняет многих десятиклассников: в хвойном лесу 800 000 елей и ни на одной из них не более 500 000 игл; доказать, что по крайней мере у двух елей число игл точно одинаково.

Различные стороны математических способностей встречаются в разных комбинациях. Уже исключительное развитие одной из них иногда позволяет придти к неожиданным и замечательным открытиям, хотя чрезмерная односторонность, конечно, опасна. Само собой разумеется, что никакие способности не помогут без увлечения своим делом, без систематической повседневной работы.

Математические способности проявляются обычно довольно рано и требуют непрерывного упражнения. Пробел в знаниях, возникающий в результате полного отрыва от математики в течение нескольких лет после средней школы, часто оказывается трудновосполнимым. Работа чертежника, лаборанта, обращение с машиностроительными деталями, сборка радиоаппаратуры и тому подобное, по-видимому, содержат в себе много элементов, родственных работе математика, например, в смысле развития пространственного воображения и функционального мышления. Соприкосновение на работе с современной техникой может побудить более сознательный интерес к приложениям математики. Но мы очень советуем молодым людям, проработавшим после школы несколько лет на производстве и намеревающимся поступить на математическое отделение университета, заранее заниматься математикой и не ограничиваться только подготовкой к вступительным экзаменам (для чего при всех университетах имеются специальные подготовительные курсы), но и участвовать в математических кружках и олимпиадах и самостоятельно изучать математическую литературу. Иначе никакие льготы для «производственников» при поступлении в вузы не помогут им во время работы в университете не отстать от своих товарищей, пришедших со свежими знаниями и увлечениями прямо из школы.

4. Преподавание в школе во время обязательных классных занятий рассчитано в основном на твердое усвоение математики всеми учащимися. Попробовать свои силы в решении более трудных задач, ближе познакомиться с тем, как наука справляется с решением более сложных математических проблем, и с тем, как математика применяется в естествознании и в технике, можно в математическом кружке. Такие кружки ведут преподаватели математики во многих школах. Силами университетов и педагогических институтов во многих городах организованы межшкольные математические кружки и систематическое чтение лекций для школьников по отдельным вопросам математики или ее истории.

Естественно, что все эти начинания, как и математические олимпиады, широко открыты и для работающей молодежи, интересующейся математикой.

Математические олимпиады, на которых предлагаются трудные задачи и победителям выдаются премии и похвальные отзывы, удаются там, где хорошо поставлена работа в кружках. Олимпиады должны проводиться для завершения работы, ведущейся в течение года, а не как изолированное праздничное мероприятие.

Задачи, предлагаемые в кружках и на олимпиадах, иногда носят искусственный и даже шуточный характер. В этом нет беды, если задачи подобраны так, что для их решения требуется серьезная работа мысли, похожая на ту, которая требуется от взрослого, самостоятельно работающего математика.

В докладах, читаемых в кружках их участниками, и в лекциях, читаемых учителями и преподавателями высшей школы, широко освещаются основные пути развития математической науки, значение математики для естествознания и техники. Конечно, очень хорошо, если удастся в задачах, предлагаемых в кружках, дать принципиально важный или убедительный своей полезностью материал, но было бы напрасно требовать, чтобы таким условиям была подчинена вся та большая «тренировочная» работа молодого математика, которая достигается решением задач.

Независимо от участия в кружках можно заняться самостоятельным решением более трудных задач. Имеется несколько интересных сборников задач для любителей математики. Некоторые из них написаны так, что читатель, решая последовательно связанные друг с другом задачи, может живо представить себе пути развития довольно сложных математических теорий.

Занятия в кружках, слушание лекций и чтение дополнитель-

ной литературы не должны, конечно, отвлекать учащихся школ или подготовительных курсов от более элементарной обязательной учебной работы.

Для решения экзаменационных задач не требуется особой изобретательности. В большинстве случаев задачи решаются последовательным применением изучаемых в школе правил и приемов. Если же их решение и требует некоторой самостоятельности мысли, то дело ограничивается необходимостью систематически исследовать поставленный вопрос в самом естественном направлении.

5. Современная математическая теория дает средства, в принципе достаточные для решения самых разнообразных задач. Уже на первом курсе университета студенты знакомятся с методами нахождения с любой заданной точностью корней алгебраических уравнений какой угодно высокой степени. При изучении теории дифференциальных уравнений обнаруживается, что существуют общие методы нахождения их решений, хотя и приближенных, но тоже обладающих любой наперед заданной точностью.

Однако при практическом решении таких задач с целью получить определенный числовой результат обнаруживается, что обладать принципиальной схемой решения еще не достаточно. Например, при расчете траектории артиллерийского снаряда траектория разбивается на много десятков коротких отрезков, которые рассчитываются последовательно. Для расчета каждого следующего участка приходится проделать несколько десятков арифметических действий. Расчет одной траектории даже у вычислителя, пользующегося вспомогательными таблицами и арифмометром, занимает много часов, а иногда и несколько дней.

Кораблестроительные расчеты или расчеты, связанные с постройкой плотин больших электростанций, занимают месяцы и даже годы работы специальных вычислительных бюро. Такое положение естественно привело к необходимости усовершенствовать машинную вычислительную технику. Прежде всего, наряду с обычными арифмометрами, получили широкое распространение «малые вычислительные машины», автоматически выполняющие четыре арифметических действия над многозначными числами. Перемножение двух восьмизначных чисел занимает на такой машине сорок секунд.

При использовании этих машин вычислитель вынужден еще записывать результаты каждого действия, потом вновь вводить их в машину. За последние двадцать лет широко развернулась

работа по созданию «больших вычислительных машин», которые без вмешательства человека выполняют длинные ряды арифметических действий.

Программа работы такой машины задается перфолентой. Машина сама выполняет в указанном порядке арифметические действия, фиксирует промежуточные результаты, использует их в дальнейших вычислениях и, наконец, выдает окончательный результат пробитым на ленте или карточках или даже отпечатанным.

Сначала в подобных сложных вычислительных машинах использовались механические элементы типа колесиков обычного арифмометра и электромагнитные реле, замыкающие и размыкающие ток, приводящий в движение элементы машины. Полный переворот в вычислительной технике произошел около десяти лет назад, когда было показано, что возможно обойтись совсем без механического перемещения элементов машины, заменив их электронными лампами (диодами, триодами и т.д.) и их комбинациями (триггерами и т.п.). Благодаря этому стало возможным производить, например, в одну секунду по несколько тысяч операций умножения многозначных чисел. Еще несколько позднее электронные лампы стали заменяться полупроводниковыми элементами, имеющими значительно меньшие размеры; для «запоминания» большого числа промежуточных данных (до нескольких сотен тысяч) были введены магнитные барабаны и т.д. Стало возможным делать вычисления, требующие, например, 20 миллионов операций для предсказания по данным метеорологических станций погоды на следующий день, вычислять траекторию снаряда за время, меньшее времени его полета, и т.д.

Большие вычислительные машины иногда специально строятся для какой-либо одной цели (например, для предсказания погоды), но чаще имеют универсальный характер, т.е. предназначаются для решения самых разнообразных задач. В этом случае они размещаются в «вычислительных центрах», обслуживающих различные научные и технические учреждения, не имеющие собственных больших вычислительных машин. Часто вычислительные машины подключаются к приборам, управляющим автоматически тем или иным процессом.

Если управление быстро протекающим процессом требует сложных вычислений, основанных на данных, получаемых в ходе этого процесса, то без скоростных вычислительных машин подобная задача была бы вообще не осуществима. Сфера применения таких управляющих машин быстро растет.

Управляющие машины во многом походят на управляющие

механизмы, возникшие естественным образом в ходе эволюции живых существ (нервная система, механизм сохранения и передачи по наследству признаков каждого вида животных и растений). Общие закономерности устройства управляющих систем изучаются недавно возникшими науками: теорией информации и кибернетикой, которые в значительной своей части являются математическими и предъявляют к чистой математике много новых запросов.

Публикацию подготовили М.Смолянский и Т.Кисилева

ЧТО ТАКОЕ ФУНКЦИЯ?

А. Колмогоров

Введение

На вопрос «Что такое функция?» школьники часто отвечают: «Функцию можно задать таблицей, графиком или формулой». Ясно, что это не определение. Но школьники, которые уклоняются от формулировки явного определения и сразу переходят к описанию того, как задают функции, и не совсем не правы. Математика не может начинаться с определений. Формулируя определение некоторого понятия, мы неизбежно в самом этом определении употребляем какие-либо другие понятия. Пока мы не понимаем смысла каких-либо понятий, мы не сдвинемся с места и не сможем сформулировать ни одного определения. Поэтому изложение любой математической теории начинается с того, что какие-либо *основные понятия* принимаются без определения. Пользуясь ими, уже возможно бывает формулировать определения дальнейших *производных понятий*.

Каким же способом люди объясняют друг другу свое понимание смысла основных понятий? Для этого не существует другого способа, как разъяснение на *примерах* и при помощи подробного описания характерных свойств определяемых вещей. Эти описания могут быть в деталях не вполне ясными и сначала не исчерпывающими. Но постепенно из них смысл понятия вырисовывается с достаточной ясностью. Так мы подойдем к понятию *функции*, считая его одним из основных математических понятий, не подлежащих формальному определению.

Правда, далее будет сказано, что функция есть не что иное, как *отображение* одного множества на другое (*области определения функции на множество ее значений*). Но здесь слово *отображение* явится просто синонимом слова *функция*. Это — два названия для одного и того же понятия. Пояснение одного слова другим, равнозначным, не может заменить определения выражаемого им понятия.

Пример 1. Будем считать, что буквы x и y обозначают действительные числа. Знак $\sqrt{}$ будем считать знаком извлече-

ния арифметического квадратного корня. Равенство

$$y = \sqrt{1-x} \quad (1)$$

обозначает, что выполнены условия

$$x^2 \leq 1, y \geq 0, x^2 + y^2 = 1. \quad (2)$$

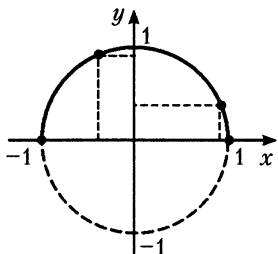


Рис. 1

Точки, координаты которых удовлетворяют этим условиям, образуют полуокружность, изображенную на рисунке 1.

Рисунок 1 делает наглядными следующие факты, которые вы можете доказать и чисто алгебраическим путем:

1) формула (1) позволяет для любого x , удовлетворяющего условиям

$$-1 \leq x \leq 1, \quad (3)$$

вычислить соответствующее ему y , которое удовлетворяет неравенствам

$$0 \leq y \leq 1; \quad (4)$$

2) каждому y , удовлетворяющему неравенствам (4), соответствует хотя бы одно такое x , которому по формуле (1) соответствует это заданное y .

Можно сказать, что формула (1) задает отображение множества чисел x , удовлетворяющих неравенствам (3), на множество чисел, подчиненных неравенствам (4). Математики часто (особенно в последнее время) для обозначения отображений употребляют стрелку. Занимающее нас отображение можно записать при помощи стрелки так:

$$x \rightarrow \sqrt{1-x^2}. \quad (5)$$

Заметьте: *отображение полностью определено, если а) задано множество E , которое отображается; б) для каждого элемента x этого множества E задан элемент y , на который элемент x отображается.*

Множество всех значений y обозначим буквой M . В первом примере E – множество чисел, удовлетворяющих условию (3), а M – множество чисел, удовлетворяющих условию (4).

Пример 2. Правила

$$1) x \rightarrow \sqrt{x^2},$$

$$2) \ x \rightarrow \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

определяют одно и то же отображение

$$x \rightarrow |x| \quad (6)$$

действительных чисел x на их модули (абсолютные величины) (рис.2).

Отображение (6) отображает множество всех действительных чисел

$$\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$$

на множество

$$\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$$

неотрицательных действительных чисел.

Вместо слова *отображение* можно говорить *функция* и записать отображение (5) так:

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad (7)$$

а отображение (6) так:

$$f(x) = |x|. \quad (8)$$

Областью определения функции (8) является множество всех действительных чисел \mathbb{R} . Множеством ее значений является множество \mathbb{R}_+ неотрицательных действительных чисел.

Пример 3. Петя, Коля, Саша и Володя живут в комнате общежития. На февраль они установили такой график дежурств:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...	28
Петя	■				■				■				■	...	
Коля		■				■				■				...	
Саша			■				■				■			...	
Володя				■				■				■		...	■

Сразу бросается в глаза сходство этой таблицы с привычными вам из школьного курса алгебры графиками функций. Имеет ли эта аналогия точный логический смысл? Установили ли здесь мальчики *отображение* одного множества на другое, т.е. определили ли некоторую функцию? И не начертили ли они график этой *функции*? (Обратите внимание на житейское выражение «установили *график* дежурств»!).

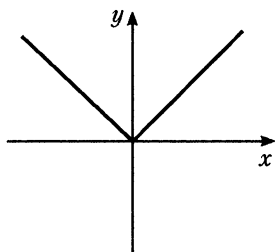


Рис. 2

Общее понятие функции

Нетрудно видеть, что в примере 3 на каждый из 28 дней февраля назначен определенный дежурный. Иначе говоря, множество дней февраля *отображено* на множество мальчиков, распределивших между собой дежурства. Можно условиться, что буква x обозначает любой день февраля, а $y = f(x)$ – дежурного в день x . Нет никаких оснований отказывать отображению день $x \rightarrow y =$ дежурный на день x в праве называться *функцией*; можно записать это отображение так: $y = f(x)$.

Любое отображение f множества E на множество M мы будем называть *функцией с областью определения E и множеством значений M* .

Не забудьте, что, говоря об отображении f множества E на множество M , мы имеем в виду, что $y = f(x)$ определено для *любого* x из E и *только* для x из этого множества, а значение y функции f непременно принадлежит множеству M , и каждое y из этого множества M является значением функции f *хотя бы* при одном значении аргумента x .

Если известно только, что значения функции f непременно принадлежат множеству M , но не утверждается, что *любой* элемент этого множества является значением функции f , то говорят, что функция отображает свою область определения E **в** множество M или что отображение f есть отображение множества E **в** множество M (рис.3).

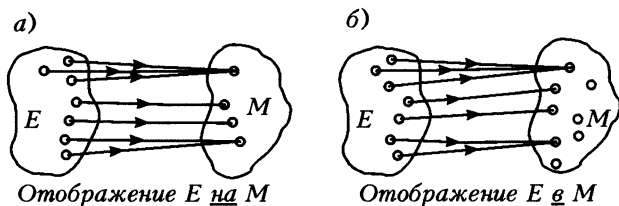


Рис. 3

Таким образом, надо строго различать смысл выражений
«отображение **на** множество M »,
«отображение **в** множество M »¹.

Например, про отображение

$$x \rightarrow |x|$$

¹ Заметьте еще, что каждое отображение «**на**» можно назвать и отображением «**в**», но не наоборот.

можно сказать, что оно является отображением \mathbb{R} в \mathbb{R} , но нельзя сказать, что это отображение \mathbb{R} на \mathbb{R} .

С чисто логической точки зрения наиболее простым случаем является случай, когда область определения функции конечна. Ясно, что функция, область определения которой состоит из n элементов, не может принимать более n различных значений. Таким образом, функции, определенные на конечных множествах, осуществляют отображения конечных множеств на конечные множества. Такие отображения являются одним из предметов изучения важной части математики – *комбинаторики*.

Пример 4. Рассмотрим функции, область определения которых есть множество $M = \{A, B\}$ из двух букв A и B и значения которых принадлежат тому же множеству, т.е. отображения множества M в себя.

Таких функций существует всего четыре. Зададим их табличным способом:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
A	A	B	A	B
B	A	B	B	A

Функции f_1 и f_2 являются *константами*, т.е. *постоянными*: множество значений каждой из этих функций состоит из одного-единственного элемента.

Функции f_3 и f_4 отображают множество M на себя. Функция f_3 может быть задана формулой

$$f_3(x) = x.$$

Это – *тождественное* отображение: каждый элемент множества E отображается в самого себя.

Чтобы закончить выяснение смысла самого понятия «функция», остается обратить внимание на то, что выбор букв для обозначения «независимого переменного», т.е. произвольного элемента области определения, и «зависимого переменного», т.е. произвольного элемента множества значений, совершенно несуществен. Записи

$$x \xrightarrow{f} \sqrt{x}, \quad \xi \xrightarrow{f} \sqrt{\xi}, \quad x \rightarrow \sqrt{y},$$

$$f(x) = y = \sqrt{x}, \quad f(\xi) = \eta = \sqrt{\xi}, \quad f(y) = x = \sqrt{y}$$

определяют одну и ту же функцию f , которая отображает неотрицательное число в арифметический квадратный корень из

него. Пользуясь любой из этих записей, мы получим $f(1) = 1$, $f(4)$, $f(9) = 3$ и т.д.

Обратимая функция

Функция

$$y = f(x)$$

называется *обратимой*², если каждое свое значение она принимает один-единственный раз. Таковы функции $f_3(x)$ и $f_4(x)$ из примера 4. Функции же $f_1(x)$ и $f_2(x)$ из примера 4 и функции из примеров 1, 2, и 3 *необратимы*.

Чтобы доказать, что какая-либо функция необратима, достаточно указать какие-либо два значения аргумента $x_1 \neq x_2$, для которых

$$f(x_1) = f(x_2).$$

В примере 3 достаточно заметить, что Петя дежурит как 1-го, так и 5-го февраля. Поэтому функция примера 3 необратима.

Пример 5. Функция

$$x \xrightarrow{f} y = -\sqrt{x}$$

обратима. Она определена на множестве \mathbb{R}_+ неотрицательных чисел. Множеством ее значений является множество

$$\mathbb{R}_- = (-\infty; 0]$$

всех неположительных чисел. Задав любое y из множества \mathbb{R}_- , можно найти соответствующее x по формуле $x = y^2$. Функция g

$$y \xrightarrow{g} x = y^2 \text{ при } y \leq 0$$

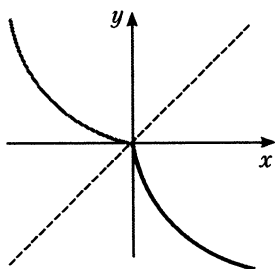


Рис. 4

есть функция, *обратная* к функции f . Она отображает множество \mathbb{R}_- на множество \mathbb{R}_+ . Как уже говорилось, выбор букв для обозначения независимого и зависимого переменного несуществен.

Функции f и g можно записать в виде

$$f(x) = -\sqrt{x} \text{ при } x \geq 0,$$

$$g(x) = x^2 \text{ при } x \leq 0.$$

² Происхождение названия выяснится дальше: функция обратима, если для нее существует обратная ей функция.

На рисунке 4 изображены графики взаимно обратных функций f и g .

Пример 6. Функция f , заданная таблицей

x	А	Б	В	Г	Д
$y = f(x)$	3	1	2	5	4

определена на множестве первых пяти букв русского алфавита, а множество ее значений есть множество первых пяти натуральных чисел. Обратная функция g задается таблицей

x	1	2	3	4	5
$y = g(x)$	Б	В	А	Д	Г

На рисунке 5 даны графики этих функций.

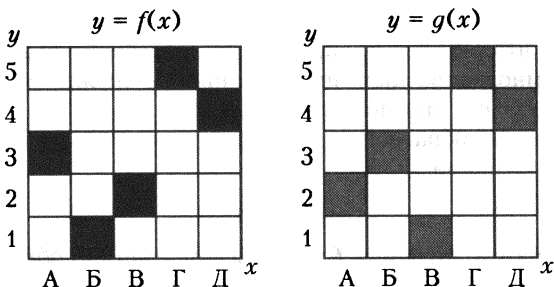


Рис. 5

Дадим точные определения. Пусть f – отображение множества E на множество M . Если для любого элемента y из множества M существует один-единственный элемент

$$x = g(y)$$

множества E , для которого

$$f(x) = y,$$

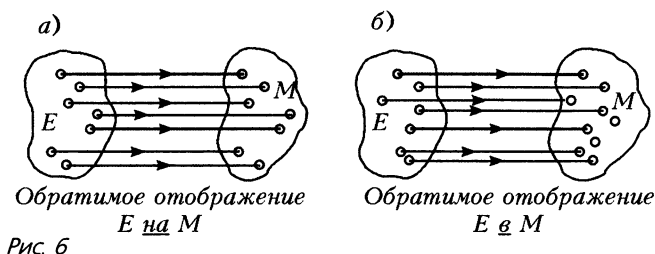
то отображение f является *обратимым* (рис.6), а

$$y \xrightarrow{g} x$$

называется отображением, *обратным* к отображению f .

Таким образом, обратимость отображения f означает, что у него есть обратное отображение g . Отображение, обратное к f , принято обозначать знаком f^{-1} . Например, если

$$f(x) = x^3,$$



то

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}.$$

Так как слово «функция» есть просто синоним слова «отображение», то тем самым мы определили и смысл выражения «обратная функция». Попробуйте сами повторить сказанное выше, употребляя вместо слова «отображение» слово «функция».

Ясно, что областью определения обратной функции f^{-1} является множество значений функции f , а множество значений f^{-1} есть область определения функции f .

Функцией, обратной к обратной функции f^{-1} , является исходная функция f :

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Таким образом, функции f и f^{-1} всегда *взаимно обратны*.

Пример 7. Существуют функции, которые сами себе обратны. Таковы функции

а) $f(x) = x$, б) $f(x) = \frac{1}{x}$, в) $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

Проверьте! Графики этих функций даны на рисунке 7. Заметьте, что все эти графики *симметричны* относительно биссектрисы первого и третьего квадрантов, т.е. прямой $y = x$.

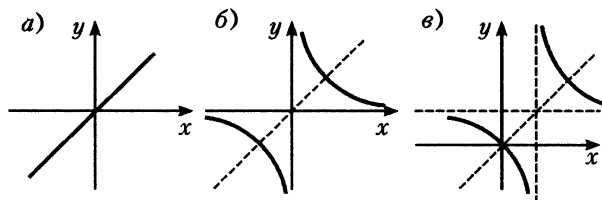


Рис. 7

Изобразим схематически соотношения между разными видами отображения множества A на множество B и множества A в множество B (рис.8).

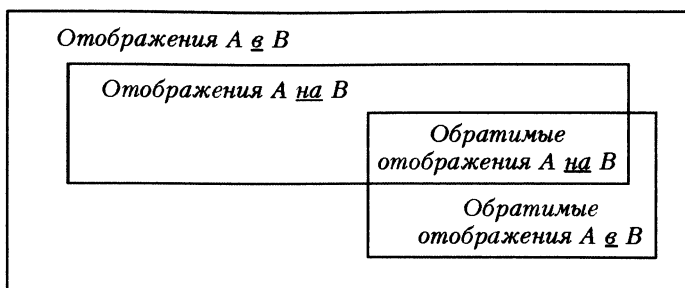


Рис. 8

Напомним еще раз, что самым общим понятием является понятие отображения A в B . Если при таком отображении образ A совпадает с B , говорят об отображении A на B .

Обратимые отображения называют еще *взаимно однозначными* отображениями. Этот термин вам часто встретится в книгах. Но не принято говорить о «взаимно однозначных функциях». Так как мы считаем слова «функция» и «отображение» синонимами, то вместо слов «взаимно однозначная функция» мы предпочли применять слова «обратимая функция» или, что то же самое, «обратимое отображение».

В последнее время в нашей литературе получила еще распространение французская терминология:

- 1) отображения A на B называются «сюръективными» или «сюръекциями»;
- 2) взаимно однозначные отображения A в B называют «инъективными» или «инъекциями»;
- 3) взаимно однозначные отображения A на B называют «биективными» или «биекциями».

Обратите внимание на то, что при внимательном отношении к употреблению предлогов «в» и «на» такое обилие терминов излишне.

Некоторые замечания

В школе вы привыкли иметь дело только с числовыми функциями, область определения которых состоит из чисел и значения которых являются числами. Смысл выражения «числовая функция числового аргумента» не вполне определен. Ведь само понятие числа в школе постепенно обобщается. Мы остановимся на системе всех действительных чисел, с которой школьники знакомятся в девятом классе. Действительные функции действительного аргумента и изучаются по преимуществу в

старших классах средней школы. Их графики вы умеете вычерчивать на «числовой плоскости».

В школьных учебниках пишут, что «числовая плоскость» — это такая плоскость, на которой некоторым определенным образом введены координаты. Если верить учебникам буквально, то числовых плоскостей очень много. Проводя на классной доске оси координат, учитель превращает в «числовую плоскость» плоскость этой доски; ученики на страницах своих тетрадок изготавливают все новые и новые «числовые плоскости», иногда по несколько на одной странице!

В школьном курсе алгебры чаще всего имеют дело с функциями, заданными «аналитически» при помощи формулы. Областью определения такой функции, если не сказано ничего другого, считается множество всех тех значений аргумента, для которых все предписанные формулой операции над числами выполнимы. Будем, например, как это принято в школе, считать знак $\sqrt{}$ знаком «арифметического» квадратного корня. Ясно, что формула

$$y = f(x) = (\sqrt{x})^2 \quad (9)$$

позволяет вычислить по заданному x соответствующее ему значение y лишь при неотрицательном x (иначе квадратный корень «не извлекается»).

При неотрицательном x

$$y = f(x) = x. \quad (10)$$

Формула (10) проще, чем формула (9), и хотелось бы ее считать формулой, определяющей нашу функцию. Но область определения функции, заданной формулой (10), состоит не из одних неотрицательных чисел x , а из *всех* чисел x . Если мы хотим дать новое определение *той самой* функции, которая определена формулой (1), надо написать

$$y = f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \geq 0, \\ \text{не определена} & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (11)$$

Подобным же образом функцию

$$g(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

можно записать так:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{при } x \neq 1, \\ \text{не определена} & \text{при } x = 1. \end{cases} \quad (12)$$

На школьных и вузовских экзаменах требуют полной точности в подобных вопросах.

График функции

Рассмотрим следующий график дежурств:

	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
Петя							
Коля							
Саша							
Володя							

Мы уже знаем, что это график функции: имя дежурного можно считать функцией дня недели. Так как дней недели семь, а мальчиков четверо, то мы нарисовали

$$7 \times 4 = 28$$

клеточек, но отметили только семь из этих клеточек. Если бы мальчики решили расположить свои имена по алфавиту, то получилась бы следующая табличка:

	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
Петя							
Коля							
Саша							
Володя							

Выглядит она по-другому, но изображает то же самое распределение дежурств – ту же самую функцию.

В обеих табличках 28 клеточек соответствуют 28-ми возможным парам (*день недели, мальчик*).

Из этих 28 пар выделены семь пар (пн, Петя), (вт, Коля), (ср, Саша), (чт, Володя), (пт, Петя), (сб, Коля), (вс, Саша), т.е. все пары, в которых день недели соединен с дежурным на этот день: (*день недели, дежурный на этот день*), или абстрактно

но: пары вида

$$(x, f(x)).$$

Только выбор этих пар и существен для задания функции.

После этого примера вам, быть может, не покажется неожиданным такое определение: *графиком функции f называется множество всех таких пар³*

$$(x, y),$$

что: 1) первый элемент пары x принадлежит области определения функции, 2) второй элемент пары $y = f(x)$.

В нашем примере график функции f :

$$\Gamma_f = \{(\text{пн}, \text{Петя}), (\text{вт}, \text{Коля}), (\text{ср}, \text{Саша}), (\text{чт}, \text{Володя}), \\ (\text{пт}, \text{Петя}), (\text{сб}, \text{Коля}), (\text{вс}, \text{Саша})\}.$$

Для функций, заданных таблицей

x	f_1	f_2	f_3	f_4
A	A	B	A	B
B	A	B	B	A

в соответствии с данным определением получим графики

$$\Gamma_1 = \{(A, A), (B, A)\}, \quad \Gamma_2 = \{(A, B), (B, B)\},$$

$$\Gamma_3 = \{(A, A), (B, B)\}, \quad \Gamma_4 = \{(A, B), (B, A)\}.$$

Ясно, что для функций с конечной областью определения число элементов графика (т.е. число входящих в график пар) равно числу элементов области определения функции. Для функций с бесконечной областью определения все пары

$$(x, f(x)),$$

выписать нельзя. Приходится описывать эти пары при помощи их свойств.

Например, для функции

$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

³ Всюду в этой статье имеются в виду «упорядоченные пары». Пара (1, 2) отличается от пары (2, 1). Первый и второй элементы пары могут и совпадать: (1, 1) или (2, 2) – тоже пары.

график состоит из всевозможных пар чисел вида

$$(x, \sqrt{1-x^2}),$$

т.е. из всех пар (x, y) , для которых выполнены два условия: $x^2 + y^2 = 1$ и $y \geq 0$. Это определение графика функции можно записать в виде

$$\Gamma_f = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}.$$

Самое общее определение графика функции f можно записать в виде такой формулы⁴:

$$\Gamma_f = \{(x, y) | y^2 = f(x)\}.$$

Определив график функции как множество пар, каждая из которых состоит из значения аргумента и значения функции, соответствующего этому значению аргумента, мы освободили понятие графика от всего случайного. В этом абстрактном понимании у каждой функции имеется один-единственный график.

⁴ Мы воспользуемся стандартным обозначением, принятым в теории множеств. Запись $\{x | A(x)\}$ обозначает множество всех объектов x , удовлетворяющих условию $A(x)$. Например, $\{x | x^2 = 1\}$ – множество всех x , для которых $x^2 = 1$, т.е. множество из двух чисел: $\{+1, -1\}$.

ПУТЬ В МАТЕМАТИКУ ОТКРЫТ

А.Колмогоров

Эта заметка была написана Андреем Николаевичем Колмогоровым для газеты «Московский университет», напечатана там 8 апреля 1975 года и никогда больше не переиздавалась. За прошедшие 18 лет в стране многое изменилось, но и сегодняшнему школьнику, решающему, быть или не быть ему математиком, полезно узнать мнение великого ученого о том, кто может стать математиком, чему можно научиться на механико-математическом факультете МГУ и чем занимаются после мехмата его выпускники.

Велико число школьников, с увлечением решающих трудные математические задачи. Школьные математические кружки, кажется, по числу участников превосходят кружки других специальностей. Тем не менее, число школьников, которые после школы решаются выбрать математику своей специальностью, в частности попробовать поступить на математическое отделение Московского государственного университета, недостаточно. По-видимому, это объясняется разными причинами. Одни думают, что для профессиональной работы математика нужны какие-то совсем необычайные способности и считают свои недостаточными. Другие не совсем ясно представляют себе, что делают математики по окончании университета. Наконец, некоторых смущают разговоры о том, что математиков чуть ли уже не заменили вычислительные машины, что если уж заниматься математикой, то только «вычислительной».

Убедиться в том, что ваше увлечение математикой достаточно серьезно и длительно, конечно, важно. Я бы особенно подчеркнул необходимость того, чтобы изучение математических рассуждений и выводов и работа над решением математических задач доставляли вам непосредственное удовольствие. Чтобы вы были чувствительны к красоте математических теорем или их доказательств. Законно радоваться своему собственному остроумию в решении олимпиадных задач, но более глубокой должна быть радость от постижения объективных математических закономерностей, кем бы они ни были найдены.

Успехи на математических олимпиадах, конечно, должны подкреплять ваше желание сделаться математиком. Но даже

Опубликовано в «Кванте» №9/10 за 1993 г.

полное отсутствие таких успехов не должно чрезмерно обескураживать любящего серьезно математику и чувствующего свою способность в ней много и серьезно работать. Многие из самых крупных математиков (академик П.С.Александров, академик А.П.Мальцев и другие), познакомившись с современными олимпиадными задачами, говорили, что в своей юности решить их в ограниченный срок не смогли бы, более того, что они их совсем не увлекали бы, так как чаще всего искусственны и требуют для решения остроумия, а не глубины мысли.

Большинство выпускников математического отделения занимается не «чистой математикой», а прикладной. А работа по приложениям математики в большинстве случаев требует уметь обращаться к помощи вычислительных машин. Этому уменью на математическом отделении обучают всех студентов, хотя и в меньших размерах, чем на специальном факультете вычислительной математики и кибернетики. Так что различие между двумя факультетами для тех студентов, которые идут по окончании в научно-технические институты, оказывается не столь значительным. Дело скорее в порядке овладения разными сторонами будущей профессии. На математическом отделении студент идет от изучения математики к пониманию путей ее применения в естествознании и технике и лишь за этим — к овладению вспомогательными средствами машинных вычислений, которое, кроме принципиальных основ, частично переходит уже на период работы после окончания. Но математическое отделение, как менее специализированное, оставляет большую свободу выбора дальнейшего пути.

Замечу уже в качестве своего личного мнения, что при всей важности вычислительной техники и необходимости знакомства с ней для всех молодых математиков самым увлекательным мне представляется другое. Именно настоящее глубокое вхождение в смежные науки — физику, механику и т.д., возможность самому ставить и решать в этих науках серьезные задачи. Можно было бы привести много примеров, когда такая программа выпускникам нашего отделения удавалась. Таков был путь академика М.А.Лаврентьева. Замечу еще, что сейчас в АН СССР как работами по изучению атмосферы, так и работами по океанологии руководят директора соответствующих институтов академик А.М.Обухов и член-корреспондент АН СССР А.С.Монин, кончавшие университет по специальности математика.

Я думаю, что мысль о том, что математика открывает путь к работе в самых различных смежных науках, вполне актуальна и для нового поколения поступающих в университет.

МНОГО БИТОВ ИЗ НИЧЕГО¹

С.Артемов, Ю.Гиматов, В.Федоров

*Он думал, что уснула я
И все во сне стерплю.
Иль думал, что я думала,
Что думал он «я сплю».*

С.Маршак. Из Ковентри Патмора

Предлагаем вниманию читателей задачу, требующую для решения весьма изощренной логики:

Математик R сказал математикам P и S: «Я задумал два натуральных числа. Каждое из них больше единицы, а сумма их меньше ста. Математику P я сейчас сообщу – по секрету от S – произведение этих чисел, а математику S я сообщу – по секрету от P – их сумму». Он выполнил обещанное и предложил отгадать задуманные числа. Между P и S произошел следующий диалог (высказывания P мы обозначаем буквой π с индексами, высказывания S – буквой σ):

– Я, пожалуй, не могу сказать, чему равны задуманные числа. (π_1)

– Я заранее знал, что вы этого не сможете. (σ_1)

– А ведь тогда я их знаю. (π_2)

– А тогда и я их знаю. (σ_2)

Попробуйте теперь и вы отгадать задуманные числа.

1. Неужели их можно отгадать?

При первом взгляде на задачу она представляется неразрешимой: как можно отгадать числа, когда про них ничего не сказано?

Попробуем на примере. Пусть R задумал 7 и 42. Тогда он сообщил P число 294, S – 49. Ну, а что дальше? P сказал, что он не может отгадать задуманные числа. Ну, конечно же не может – он знает только их произведение. Хотя, впрочем, он знает еще, что они натуральные, больше единицы и их сумма меньше ста. А что это дает?

Опубликовано в «Кванте» №3 за 1977 г.

¹ Бит – двоичная единица измерения информации (БСЭ, 3 изд., 2 т.).

Обозначим задуманные числа через k_0 и l_0 , причем пусть – для определенности – $k_0 \leq l_0$. Обозначим еще произведение $k_0 \cdot l_0$ через p_0 , сумму $k_0 + l_0$ – через s_0 .

Итак, P сообщили, что $p_0 = 294$. Тогда k_0 может равняться 2, 3, 6, 7 и 14, а l_0 будет при этом равно, соответственно, 147, 98, 49, 42 и 21. Первые два значения для k_0 нам не подходят – при них $s_0 > 100$. Все равно остаются еще три возможности. Значит, P действительно не может отгадать задуманные числа.

Идем дальше. S утверждает, что он заранее знал, что P не сможет отгадать k_0 и l_0 . Как S пришел к такому выводу? Наверняка он попробовал всеми возможными способами представить известное ему s_0 в виде суммы двух допустимых слагаемых:

$$49 = 2 + 47 = 3 + 46 = \dots = 24 + 25.$$

R мог задумать любую из этих пар чисел. Он сообщил P какое-то из произведений $i \cdot (49 - i)$, и S утверждает, что ни по одному из них P не может отгадать задуманные числа.

А если при некотором i оба числа i , $49 - i$ – простые? Например, если R задумал 2 и 47, то P он сообщил 94, и P прекрасно может отгадать задуманные числа.

Следовательно, если R задумал 7 и 42, то S , получив $s_0 = 49$, не имел бы права произнести (σ_1) . Значит, R не мог задумать 7 и 42.

Таким образом, кое-что о задуманных числах сказать все-таки можно.

Преодолев первоначальные сомнения, подумаем, в каком направлении двигаться. Один способ отгадывания уже виден: брать всевозможные пары чисел k_0 , l_0 , удовлетворяющие неравенствам

$$2 \leq k_0 \leq l_0 \leq 97, \quad (1)$$

$$4 \leq k_0 + l_0 \leq 99, \quad (2)$$

и проверять, «выдерживают» ли они диалог $(\pi_1) - (\sigma_2)$.

Поскольку перебор во всех случаях конечен, в принципе можно было бы действовать и так. Однако решать задачу таким образом скучно. Попробуем сократить перебор.

Прежде всего давайте сначала искать не k_0 и l_0 , а их сумму s_0 : для пары $\langle k_0, l_0 \rangle$ возможных вариантов больше двух тысяч, а для s_0 – меньше ста. Впрочем, и на этом пути лобовой перебор длинен и скучен.

2. Около гипотезы Гольдбаха–Эйлера

Какую информацию можно извлечь из (π_1) и (σ_1) ? Что они означают?

(π_1) , очевидно, означает, что

p_0 не однозначно разлагается в произведение двух множителей, удовлетворяющих неравенствам (1), (2); (π'_1)

(σ_1) означает, что

при любом разложении числа s_0 в сумму двух слагаемых, удовлетворяющих неравенствам (1), их произведение обладает свойством (π'_1) . (σ'_1)

Высказывание (π'_1) позволяет отбросить некоторые произведения, (σ'_1) – некоторые суммы.

Из (σ'_1) вытекает, что s_0 не представимо в виде суммы двух простых чисел: если $s'_0 = q_1 + q_2$, где q_1, q_2 – простые, то число $q_1 \cdot q_2$ единственным образом разлагается в произведение двух множителей, удовлетворяющих неравенствам (1), (2), и, следовательно, не обладает свойством (π'_1) .

Но любое четное число, удовлетворяющее неравенствам (2), представимо в виде суммы двух простых (это доказывается последовательной проверкой чисел 4, 6, 8, ..., 98).

Следовательно, s_0 – нечетное. Кроме того, $s_0 - 2$ – составное: иначе $s_0 = 2 + (s_0 - 2)$ представлялось бы в виде суммы двух простых. После отбрасывания чисел, не удовлетворяющих этим двум условиям, для s_0 остается 24 возможности.

Выше мы воспользовались тем, что все четные числа от 4 до 98 представимы в виде суммы двух простых.

В 1742 г. член Петербургской Академии наук Христиан Гольдбах в письме к Леонарду Эйлеру высказал предположение, что любое нечетное число, большее пяти, может быть представлено в виде суммы трех простых чисел. В ответном письме Эйлер выдвинул гипотезу, что каждое четное число, большее двух, представимо в виде суммы двух простых чисел. (Из гипотезы Эйлера гипотезу Гольдбаха вывести очень легко – сделайте это!)

В течение почти двухсот лет гипотезы Гольдбаха и Эйлера казались совершенно недоступными для доказательства, хотя непосредственным перебором математик Миле проверил их до 9 000 000.

В 1930 г. замечательный советский математик Л.Г.Шнирельман доказал существование такого k , что каждое натуральное число $n > 1$ может быть представлено в виде суммы не более k простых чисел. Число

k у Шнирельмана было довольно велико. В настоящее время доказано, что теорема Шнирельмана верна при $k = 20$.

В 1934 г. академик И.М.Виноградов доказал существование такого n_0 , что любое нечетное число $n > n_0$ представимо в виде суммы трех простых чисел. Казалось бы, в век ЭВМ можно было бы поручить машине проверить «остальные» числа (от 7 до n_0), но «постоянная Виноградова» n_0 так велика (по последним оценкам, $n_0 > 2^{2^{16}}$), что эта проверка превосходит возможности современных ЭВМ.

В доказательстве же гипотезы Эйлера до сих пор не достигнуто никакого существенного успеха.

3. Дальше в лес

Оказывается, из (σ'_1) можно вывести

$$s_0 < 55. \quad (3)$$

В самом деле, предположим, что $s_0 \geq 55$. Тогда s_0 не обладает свойством (σ'_1) : можно так разложить его в сумму двух слагаемых, удовлетворяющих неравенствам (1), что для их произведения не будет выполнено условие (π'_1) . Это разложение: $s_0 = (s_0 - 53) + 53$. Из $s_0 \geq 55$ вытекает $s_0 - 53 \geq 2$. Произведение $(s_0 - 53) \cdot 53$ единственным образом разлагается на два множителя, сумма которых меньше ста: поскольку 53 – простое число, один из множителей обязательно имеет вид $53d$; так как $53 \cdot 2 > 100$, $d = 1$. Но по условию s_0 обладает свойством (σ'_1) . Противоречие!

После (3) для s_0 остается уже 11 возможностей:

$$11, 17, 23, 27, 29, 35, 37, 41, 47, 51, 53. \quad (4)$$

Попробуем теперь без перебора установить, какие из чисел (4) удовлетворяют условию (σ'_1) . Пусть s – произвольное из чисел (4). Поскольку s нечетно, всякое его разложение в сумму имеет вид $s = 2a + m$. Допустим, s не обладает свойством (σ'_1) . Тогда найдется такое a , что произведение $2a \cdot m$ «расшифровывается» однозначно.

Это a не может равняться единице, так как в этом случае $s = 2 + m$, а произведение $2m$ двояко разлагается в произведение. В самом деле, поскольку $m = s - 2$ – составное нечетное число, $m = pq$, где $p > 2$ и $q > 2$. Оба разложения

$$2m = 2 \cdot pq = 2p \cdot q$$

годятся: $2 + pq = 2 + m = s < 100$ и $2p + q = 2 + pq - (p - 1)(q - 2) < 2 + pq < 100$.

Значит, $a \geq 2$.

Если $a \neq m$, то $s = 2a \cdot m$ и $s = 2m \cdot a$ — два различных разложения. Поскольку $2a + m = s < 100$, и s не обладает свойством (σ'_1) , должно быть $2m + a \geq 100$. Так как $s = 2a + m \leq 53$, имеем $m \leq 53 - 2a$, $2m + a \leq 106 - 3a$. Из $2m + a \geq 100$ и $2m + a \leq 106 - 3a$ вытекает $a \leq 2$. Следовательно, $a = 2$. Из $2m + a \geq 100$ и $m \leq 53 - 2a$ получаем теперь $m = 49$. Итак, в этом случае $s = 53$, причем «подозрительным» является разложение $53 = 4 + 49$.

Если же $a = m$, то $s = 3a$ делится на 3. В (4) таких чисел два: 27 и 51. «Подозрительными» являются разложения $27 = 9 + 18$ и $51 = 17 + 34$.

Число 51 действительно не обладает свойством (σ'_1) : $51 = 17 + 34$, и произведение $17 \cdot 34$ при разложении на два множителя дает только одну сумму, меньшую ста. Таким образом, его можно выбросить из списка «кандидатов в s_0 ».

Числа 27 и 53 удовлетворяют условию (σ'_1) : $9 \cdot 18 = 2 \cdot 81$ и $2 + 81 < 100$; $4 \cdot 49 = 7 \cdot 28$ и $7 + 28 < 100$.

Итак, для дальнейшего исследования осталось 10 кандидатов: 11, 17, 23, 27, 29, 35, 37, 41, 47, 53, причем все они обладают свойством (σ'_1) .

4. «Тогда и я их знаю»

Используем, наконец, (π_2) и (σ_2) . Можно было бы истолковать (π_2) и (σ_2) подобно тому, как мы это сделали с (π_1) и (σ_1) . Мы попробуем обойтись без этого.

Из (σ_2) и (3) можно вывести

$$s_0 < 33. \quad (5)$$

Допустим противное: $s_0 \geq 33$. Тогда S , разлагая всеми возможными способами s_0 в сумму двух слагаемых, имел бы среди этих разложений $s_0 = (s_0 - 31) + 31 = (s_0 - 29) + 29$.

Если бы P было сообщено произведение $(s_0 - 31) \cdot 31$, то он мог бы, сообразив (3) и учтя, что 31 — простое число, понять, что $(s_0 - 31) \cdot 31$ единственным образом разлагается в произведение двух множителей, сумма которых удовлетворяет (3). В этом случае P отгадал бы k_0 и l_0 .

Аналогичная возможность была у P , если ему было сообщено произведение $(s_0 - 29) \cdot 29$.

Значит, в случае $s_0 \geq 33$, S и после (π_2) не смог бы точно назвать k_0 , l_0 , т.е. не смог бы произнести (σ_2) .

После (5) остается 5 кандидатов: 11, 17, 23, 27, 29.

Если p_0 имеет вид $2^n \cdot p$, где p — нечетное простое число, то P однозначно определяет k_0 и l_0 , потому что из всех сумм

$2^{n-t} + 2^t p$ нечетна только одна: $2^n + p$. Поэтому, если s_0 двумя способами представимо в виде $2^n + p$, то S опять-таки не может произнести (σ_2).

Это соображение позволяет отсеять еще 3 кандидата: $11 = 4 + 7 = 8 + 3$, 23 и 27.

Остались 2 кандидата: 17 и 29.

5. Тогда и мы их знаем

29 тоже не годится, поскольку $29 = 4 + 25 = 16 + 13$: если бы P имел $p_0 = 16 \cdot 13$, он бы отгадал k_0 и l_0 , так как среди сумм $2^{4-t} + 2^t \cdot 13$ нечетна только одна; если бы P имел $p_0 = 4 \cdot 25$, он бы тоже отгадал k_0 и l_0 : среди соответствующих сумм нечетна, кроме 29, еще только $25(4 \cdot 25 = 5 \cdot 20)$, но $25 - 2$ – простое число.

Итак, либо $s_0 = 17$, либо задача не имеет решений.

Какое же p_0 могло быть у P при $s_0 = 17$? Переберем все разложения числа 17 в сумму двух слагаемых:

$$17 = 2 + 15 = 3 + 14 = \dots = 8 + 9.$$

При любом из произведений, кроме $4 \cdot 13$, P не смог бы произнести (π_2). Например, если бы P имел $p_0 = 30$, он среди разложений числа 30 в произведение двух множителей увидел бы и $30 = 2 \cdot 15$, и $30 = 5 \cdot 6$, но как 17, так и 11 обладают свойством (σ_1).

Остается единственный кандидат для p_0 : 52. Этот кандидат дает возможность P произнести (π_2): среди всех разложений числа 52 в произведение двух множителей существует ровно одно: $52 = 4 \cdot 13$, дающее нечетную сумму.

Итак, $s_0 = 17$, $p_0 = 52$, $k_0 = 4$, $l_0 = 13$.

Задачи

1. Всякое ли нечетное число, большее трех, представимо в виде $2^n + p$, где p – простое число? В отрицательном случае укажите наименьшее непредставимое.

2. (Б.Кукушкин) Начало условия задачи – вплоть до (σ_1) – то же, что и в начале статьи. Дальше диалог меняется:

– А я заранее знал, что вы это будете знать заранее. (π_2)

– Я не знаю, чему равны задуманные числа. (σ_2)

– А я тогда их знаю. (π_3)

Найдите задуманные числа.

ОКРУЖНОСТИ НА РЕШЕТКАХ

В.Вавилов, А.Устинов

Статья посвящена изучению возможных расположений окружности на декартовой плоскости и выяснению ситуаций, когда для заданного натурального числа n окружность внутри себя содержит ровно n узлов целочисленной решетки \mathbb{Z}^2 или проходит ровно через n ее узлов.

Теоремы Гаусса

Первое исследование решетки \mathbb{Z}^2 как математического объекта было, по-видимому, предпринято К.Гауссом – королем математики, как его называли современники. Он заинтересовался вопросом о том, как быстро с ростом R растет число $N(R)$ точек с целыми координатами в круге

$$K(R) = \{(x; y) : x^2 + y^2 \leq R^2\},$$

где $R \geq 0$ целое число. Число $N(R)$ равно площади фигуры $F(R)$, составленной из тех единичных квадратов решетки, у которых левый нижний угол лежит в $K(R)$ (рис.1).

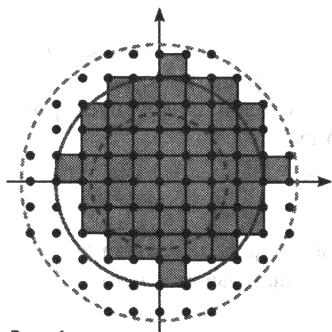


Рис. 1

Так как наибольшее расстояние между двумя точками единичного квадрата не превосходит $\sqrt{2}$, то ясно, что все квадраты, которые пересекаются окружностью $x^2 + y^2 = R^2$, расположены в кольце (при $R = 4$ его границы на рисунке 1 изображены пунктиром)

$$\{(x; y) : (R - \sqrt{2})^2 \leq x^2 + y^2 \leq (R + \sqrt{2})^2\}.$$

Площадь этого кольца равна

$$\pi \left((R + \sqrt{2})^2 - (R - \sqrt{2})^2 \right) = 4\pi\sqrt{2}R,$$

и поэтому

$$\left| [F(R)] - \pi R^2 \right| < 4\pi\sqrt{2}R,$$

где $[F]$ обозначает площадь фигуры F .

Итак,

$$\left| \frac{N(R)}{R^2} - \pi \right| \leq \frac{4\pi\sqrt{2}}{R}.$$

Таким образом, при всех достаточно больших R имеет место приближенное равенство

$$\frac{N(R)}{R^2} \approx \pi,$$

что в более точной форме можно записать в виде отдельного утверждения.

Теорема 1 (К.Гаусс). *Имеет место соотношение*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{N(R)}{R^2} = \pi. \quad (1)$$

Гаусс (как написано в книге [1]) численно проверил точность формулы (1), составив таблицу, где в последней строке приводятся приближенные значения для числа π :

R	10	20	30	100	200	300
$N(R)$	317	1257	2821	31417	125629	282697
π	3,17	3,1425	3,134	3,1417	3,140725	3,14107

Доказанное равенство (1) связано с одним из основных свойств решетки \mathbb{Z}^2 : *площадь любого параллелограмма Π , порождающего решетку \mathbb{Z}^2 , равна 1*. Такие параллелограммы называются фундаментальными. Говорят, что параллелограмм порождает решетку \mathbb{Z}^2 , если вся плоскость разбита (без наложений) на равные Π параллелограммы, а множество вершин всех параллелограммов разбиения совпадает с множеством всех узлов целочисленной решетки.

Для доказательства сформулированного утверждения установим взаимно однозначное соответствие между фундаментальными параллелограммами и узлами решетки \mathbb{Z}^2 . Сопоставим каждому параллелограмму его самую левую вершину, а если таких вершин две, то из них выберем ту, которая имеет наименьшую ординату. Модуль разности площади круга $K(R)$ и площади фигуры F , состоящей из объединения всех параллелограммов, которые соответствуют узлам из $K(R)$, меньше площади

$$\{(x; y) : (R - a)^2 \leq x^2 + y^2 \leq (R + a)^2\},$$

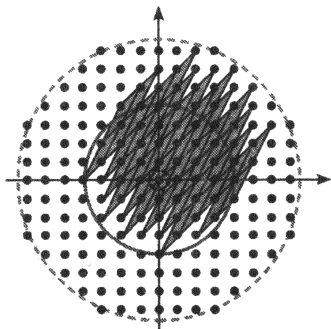


Рис. 2

где a — наибольшая диагональ параллелограмма Π (на рисунке 2 $R = 4$ и $a = \sqrt{13}$). Если $[\Pi] = \Delta$, то $[F] = \Delta \cdot N(R)$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} & \left| \Delta \cdot N(R) - \pi R^2 \right| < \\ & < \pi \left((R + a)^2 - (R - a)^2 \right) = 4\pi a R \end{aligned}$$

Значит,

$$\left| \frac{N(R)}{R^2} - \frac{\pi}{\Delta} \right| < \frac{4a\pi}{R\Delta}.$$

Устремляя R к бесконечности, по доказанному выше получаем, что

$$\pi = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{N(R)}{R^2} = \frac{\pi}{\Delta} = 1,$$

т.е. $\Delta = 1$.

Получим еще одно интересное следствие формулы (1). Величина $N(R)$ представляет собой число всех упорядоченных пар целых чисел $(x; y)$, для которых $x^2 + y^2 \leq R^2$. Для любого узла $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ число $x^2 + y^2$ является целым. Поэтому если $r(k)$ обозначает число всех различных способов представления натурального k в виде суммы двух квадратов целых чисел (представления

$$k = a^2 + b^2 = (-a)^2 + b^2 = a^2 + (-b)^2 = (-a)^2 + (-b)^2$$

считаются попарно различными), то

$$N(R) = r(0) + r(1) + \dots + r(n),$$

где $n = R^2$.

Теорема 2 (К.Гаусс). Справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r(0) + r(1) + \dots + r(n)}{n} = \pi.$$

Отметим, что сама функция $r(n)$ ведет себя не регулярно. Например, $r(0) = 1$, $r(1) = 4$, $r(2) = 4$, $r(3) = 0$, $r(4) = 4$, $r(5) = 8$, $r(6) = 0$, $r(7) = 0$, $r(8) = 4$, ..., $r(21) = 0$, $r(22) = 0$, $r(23) = 0$, $r(24) = 0$, $r(25) = 12$.

Представление чисел суммой двух квадратов

С геометрической точки зрения величина $r(k)$ – это количество целых точек на окружности радиуса k с центром в начале координат. Ниже нам понадобятся формулы для вычисления значений функции $r(k)$.

Для натурального m запись $a \equiv b \pmod{m}$ означает, что числа a и b дают одинаковые остатки при делении на m ; другими словами, $a = mt + b$ ($t \in \mathbb{Z}$).

Инструментом для дальнейших построений является следующий важный результат.

Теорема 3 (о представлении целых чисел суммой двух квадратов). Пусть $n > 1$ – натуральное число.

а) Тогда

$$r(n) = 4(d_1(n) - d_3(n)),$$

где $d_1(n)$ – количество делителей числа n вида $4k + 1$ и $d_3(n)$ – количество делителей n вида $4k + 3$.

б) Если $n = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} q_1^{\beta_1} \dots q_l^{\beta_l}$ – каноническое разложение n на простые множители, в котором $p_j \equiv 1 \pmod{4}$, $q_j \equiv 3 \pmod{4}$, то

$$r(n) = \begin{cases} 4(\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_k + 1), & \text{когда } \beta_1, \dots, \beta_l \text{ четные;} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Полное доказательство этой теоремы, использующее свойства комплексных чисел, можно найти в статье А.Гончарова «Арифметика гауссовых чисел» («Квант» №12 за 1985 г.).

Отметим один полезный частный случай теоремы 3: уравнение

$$x^2 + y^2 = 5^k \quad (k \geq 0)$$

имеет $4(k+1)$ целочисленных решений; другими словами, *окружность радиуса $5^{k/2}$ с центром в начале координат проходит в точности через $4(k+1)$ узлов решетки \mathbb{Z}^2 .*

Теорема 3 имеет много различных приложений. В качестве первого из них приведем доказательство формулы Лейбница, которая на первый взгляд не связана ни с решетками, ни с представлениями чисел в виде суммы двух квадратов.

Теорема 4 (Г.Лейбниц). Справедливо равенство

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4},$$

где под выражением слева понимается

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n, \quad S_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Доказательство. Согласно утверждению а) теоремы 3,

$$N(R) = 1 + 4 \sum_{n=1}^{R^2} (d_1(n) - d_3(n)).$$

В то же время,

$$\sum_{n=1}^{R^2} d_1(n) = \left[\frac{R^2}{1} \right] + \left[\frac{R^2}{5} \right] + \left[\frac{R^2}{9} \right] + \dots,$$

где справа стоит конечная сумма, а равенство справедливо, поскольку каждое слагаемое вида $\left[\frac{R^2}{k} \right]$ ($k = 1, 5, 9, 13, \dots$) равно количеству чисел, кратных k , в множестве $\{1, 2, 3, \dots, R^2\}$. Аналогично,

$$\sum_{n=1}^{R^2} d_3(n) = \left[\frac{R^2}{3} \right] + \left[\frac{R^2}{7} \right] + \left[\frac{R^2}{11} \right] + \dots$$

Следовательно,

$$\frac{1}{4}(N(R) - 1) = \left[\frac{R^2}{1} \right] - \left[\frac{R^2}{3} \right] + \left[\frac{R^2}{5} \right] - \left[\frac{R^2}{7} \right] + \left[\frac{R^2}{9} \right] - \left[\frac{R^2}{11} \right] + \dots$$

Определим $\sigma_n(R)$ равенством

$$\frac{1}{4}(N(R) - 1) = \left[\frac{R^2}{1} \right] - \left[\frac{R^2}{3} \right] + \dots + \left[\frac{R^2}{4n+1} \right] - \left[\frac{R^2}{4n+3} \right] + \sigma_n(R). \quad (2)$$

С одной стороны, остаток $\sigma_n(R)$ неотрицателен, так как

$$\sigma_n(R) = \left(\left[\frac{R^2}{4n+5} \right] - \left[\frac{R^2}{4n+7} \right] \right) + \left(\left[\frac{R^2}{4n+9} \right] - \left[\frac{R^2}{4n+11} \right] \right) + \dots \geq 0$$

(каждая скобка неотрицательна). С другой стороны,

$$\sigma_n(R) = \left[\frac{R^2}{4n+5} \right] - \left(\left[\frac{R^2}{4n+7} \right] - \left[\frac{R^2}{4n+9} \right] \right) - \dots \leq \left[\frac{R^2}{4n+5} \right].$$

Пусть $R = 4n + 3$. Тогда очевидно, что $0 \leq \sigma_n(R) \leq R$. Если в формуле (2) отбросить все целые части, то ее правая часть (по

модулю) изменится не более чем на R . Таким образом,

$$\frac{1}{4}(N(R)-1) = R^2 \left(1 - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} \right) + 2\theta R$$

или

$$\frac{N(R)-1}{4R^2} = 1 - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{R-2} - \frac{1}{R} + \frac{2\theta}{R},$$

где $|\theta| \leq 1$. Устремляя теперь R к бесконечности, с учетом равенства (1) получаем формулу Лейбница.

Окружности Шинцеля

Сначала отметим, что для любого натурального числа n существует круг с центром в точке $(\sqrt{2}; 1/3)$, который содержит внутри себя n точек целочисленной решетки. Для доказательства этого покажем, что если $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ — два различных узла целочисленной решетки, то *они находятся на различных расстояниях от точки $(\sqrt{2}; 1/3)$* . Действительно, если

$$(x_1 - \sqrt{2})^2 + \left(y_1 - \frac{1}{3}\right)^2 = (x_2 - \sqrt{2})^2 + \left(y_2 - \frac{1}{3}\right)^2,$$

то

$$\left(x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 - \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - 2\sqrt{2}(x_1 - x_2)\right) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$x_1 = x_2 \text{ и } y_1^2 - y_2^2 - \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 = 0.$$

Второе равенство означает, что

$$\left(y_1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \left(y_2 - \frac{1}{3}\right)^2 \text{ или } 3y_1 - 1 = \pm(3y_2 - 1),$$

т.е. либо $y_1 = y_2$, либо $3(y_1 + y_2) = 2$, что невозможно. Таким образом, $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Итак, можно выбрать такую растущую последовательность радиусов R_n , что в круге $(x - \sqrt{2})^2 + (y - 1/3)^2 = R_n^2$ будет содержаться в точности n точек.

Более интересным и трудным является следующий вопрос: *сколько точек решетки \mathbb{Z}^2 может попасть на окружность?*

Легко отыскать окружности, которые проходят через 1, 2, 3 или 4 точки (найдите их самостоятельно). Нетрудно придумать примеры для $n = 8$ и $n = 12$ (рис. 3, 4).

Менее тривиален случай, когда $n = 6$ (рис. 5). Внимательно сравнив окружности на рисунках 4 и 5, можно догадаться, как

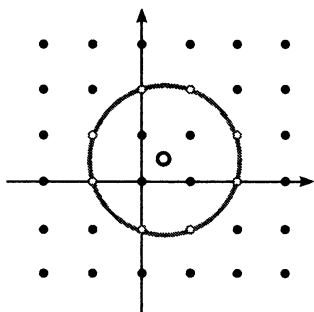


Рис. 3

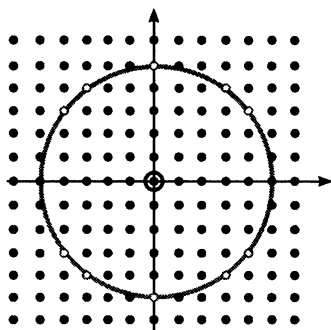


Рис. 4

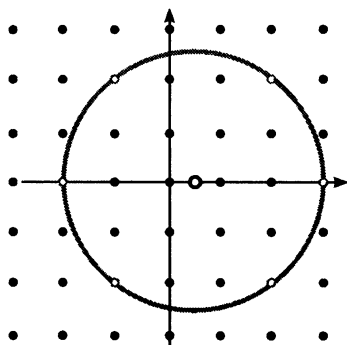


Рис. 5

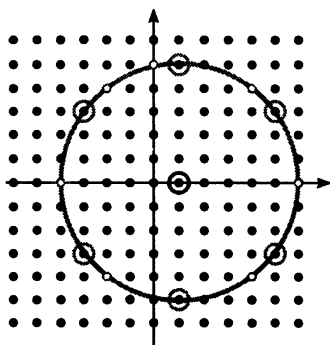


Рис. 6

был построен этот пример. Окружность радиуса 5 была нарисована с центром в точке $(1; 0)$ (рис.6). Из 12 точек на ней 6 имеют четные координаты, т.е. являются узлами решетки $(2\mathbb{Z}) \times (2\mathbb{Z})$, которая состоит из точек с четными координатами. Рассматривая эту более крупную решетку, мы и получаем рисунок 5.

Однако, имея только эти примеры, не вполне ясно, существуют ли окружности, на которых лежат 5, 7 или 17 точек.

Теорема 5 (А.Шинцель). *Для любого натурального n существует окружность, которая проходит ровно через n точек решетки \mathbb{Z}^2 .*

Доказательство. Утверждение б) теоремы 3, конечно, позволяет для любого n построить окружность, на которой лежат в точности $4n$ точек. Для этого достаточно поместить центр окружности в начало координат, а в качестве радиуса выбрать число $R = 5^{(k-1)/2}$ (см. замечание после теоремы 3).

Рисунок 5 с шестью точками на окружности наталкивает на мысль, что полезно рассмотреть окружности с центром в точке $(1/2; 0)$. Если в качестве радиуса взять число $R = 5^{(k-1)/2}/2$, то уравнение окружности запишется в виде

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5^{k-1}}{4}, \quad (3)$$

или

$$(2x - 1)^2 + (2y)^2 = 5^{k-1}. \quad (4)$$

Как уже отмечалось раньше, уравнение

$$a^2 + b^2 = 5^k \quad (5)$$

имеет $4k$ решений. Ясно, что в равенстве (5) одно из чисел a, b должно быть четным, а второе – нечетным. В уравнении (4) четность каждого из слагаемых фиксирована, и поэтому из каждых двух решений (a, b) , (b, a) уравнения (5) получается ровно одно решение уравнения (4) (черные и белые точки на рисунке 6 симметричны относительно прямой $y = x - 1$). Таким образом, уравнение (4) имеет $2k$ решений (в 2 раза меньше, чем уравнение (5)).

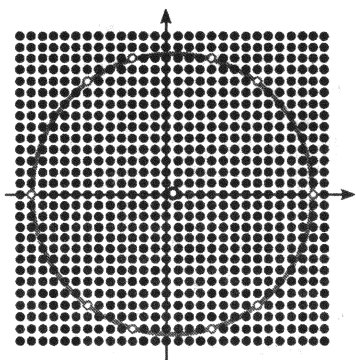
Итак, мы можем построить окружность с любым четным количеством точек на ней. Например, чтобы получить окружность с 10 точками решетки \mathbb{Z}^2 , достаточно в уравнении (4) взять $k = 5$ (рис.7).

Понятно, что точку $(1/2; 0)$ нельзя брать в качестве центра, если мы хотим найти окружность с нечетным числом целых точек на ней (рисунок всегда симметричен относительно прямой $x = 1/2$). Оказывается, что для этого достаточно сдвинуть центр круга в точку $(1/3; 0)$. Действительно, запишем уравнение окружности с центром $(1/3; 0)$ и радиусом $5^k/3$:

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{5^{2k}}{9}, \quad (6)$$

или

$$(3x - 1)^2 + (3y)^2 = 5^{2k}. \quad (7)$$



По утверждению 6) теоремы 3, уравнение

$$a^2 + b^2 = 5^{2k} \quad (8)$$

имеет $4(2k + 1)$ решений. Рассматривая остатки от деления на 3, получаем (квадраты целых чисел при делении на 3 могут давать только остатки 0 и 1), что одно из чисел a, b делится на 3, а другое – нет. Допустим, что $a \equiv 0 \pmod{3}$, $b \equiv \pm 1 \pmod{3}$. Тогда из четырех пар (a, b) , $(a, -b)$, (b, a) , $(-b, a)$ ровно одна пара приводит к решению уравнения (7). Следовательно, уравнение

(7) имеет в 4 раза меньше решений, чем уравнение (8), т.е. $2k + 1$. Например, при $k = 2$ получается окружность (рис.8; сравните его с рис.7)

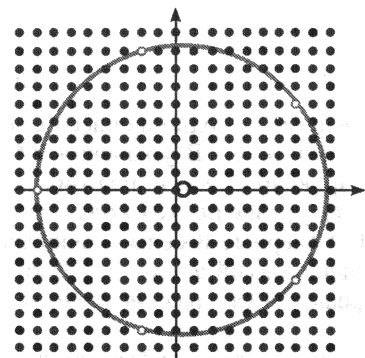
$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{5^4}{9},$$

или

$$(3x - 1)^2 + (3y)^2 = 5^4.$$

Теорема 5 полностью доказана.

Рис. 8



Окружности, которые задаются уравнениями (3) и (6), называются *окружностями Шинцеля*. Отметим, что для данного числа n эти уравнения могут задавать, вообще говоря, не самую маленькую окружность с n точками решетки на ней. Так происходит, например, при $n = 4$ (очевидно, что можно предъявить окружность радиуса $1/\sqrt{2}$) и при $n = 9$ (окружность Шинцеля имеет радиус $625/3$, но окружность с центром $(1/3; 0)$ и радиусом $65/3$ также проходит через 9 целых точек).

Возможны более нетривиальные конфигурации точек. Так, на рисунке 9 изображена окружность с центром в точке $(1/5; 2/5)$ и радиусом $\sqrt{13 \cdot 17/5}$. Она проходит через четыре целые точки $(-6; -2)$, $(1; 7)$, $(2; -6)$, $(5; 5)$. На рисунке 10 можно видеть окружность, проходящую через пять целых точек $(-12; -4)$, $(-7; 11)$, $(4; -12)$, $(10; -8)$, $(13; 1)$. Ее центр находится в точке $(1/7; 2/7)$, а радиус равен $25\sqrt{13/7}$.

В связи с этим возникает следующая исследовательская задача: *описать множество окружностей, которые проходят в точности через n точек*.

Предполагается, что окружность, проходящая через четыре точки, – достаточно редкое явление, т.е. если провести окруж-

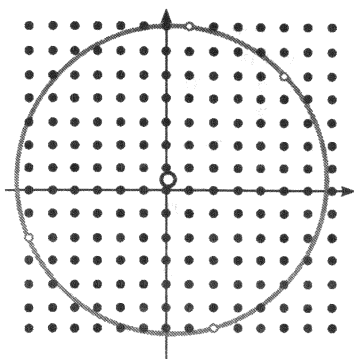


Рис. 9

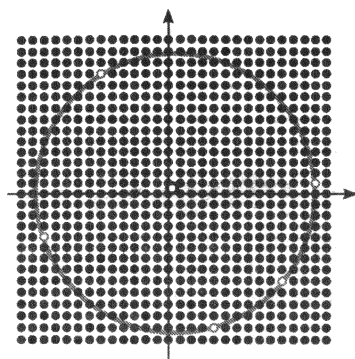


Рис. 10

ность через три случайно выбранные точки решетки \mathbb{Z}^2 , то через четвертую целую точку она пройдет с малой вероятностью.

С этой задачей тесно связан и вопрос об изображении круга на экране компьютера. Можно считать, что монитор – это прямоугольный лист клетчатой бумаги, а круг на экране – объединение всех таких клеточек (пикселей), которые пересекаются с внутренностью круга. Задача состоит в том, чтобы выяснить, сколько различных изображений на экране имеет круг данного радиуса. На рисунке 11 представлены некоторые возможные изображения круга радиуса 1,05; остальные найдите самостоятельно.

Этой тематике было посвящено выступление британского математика М.Хаксли на конференции по теории чисел в Москве в 2006 году. Полных ответов на сформулированные вопросы пока нет.

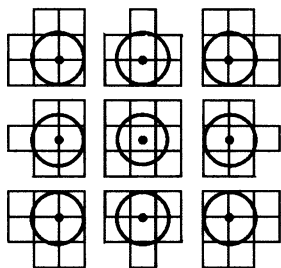


Рис. 11

Упражнения

1. Имеется шахматная доска (границы квадратов считаются окрашенными в черный цвет). Начертите на ней окружность наибольшего радиуса, целиком лежащую на черных полях.

2 (Г.Штейнгауз; см. [2]). а) Имеются 64 квадратные плитки стороной 10. Как их следует уложить на плоскости, чтобы все 64 плитки можно было описать окружностью радиусом 50? Существуют ли окружности меньшего радиуса, способные вместить все 64 плитки? Можно ли поместить 67 плиток внутри этого же круга?

6) Чему равно максимальное число квадратных плиток со стороной 1, которые можно расположить внутри круга радиуса 2?

3. Докажите, что если на окружности с центром $(0; 0)$ лежат только видимые из начала координат узлы решетки \mathbb{Z}^2 , то квадрат ее радиуса не делится ни на один квадрат натурального числа, и наоборот.

4. Докажите, что для каждого натурального n существует шар с центром в точке с координатами $(\sqrt{2}; \sqrt{3}; 1/3)$, который содержит внутри себя ровно n узлов решетки \mathbb{Z}^3 .

5 (Т.Куликовский; см. [2]). Пусть $(x - x_0)^2 + y^2 = R^2$ – окружность Шинцеля, на которой лежат n точек решетки \mathbb{Z}^2 . Докажите, что на сфере $(x - x_0)^2 + y^2 + (z - \sqrt{2})^2 = R^2 + 2$ лежат ровно n точек решетки \mathbb{Z}^3 .

6. а) Докажите, что для каждого натурального числа n существует окружность, проходящая ровно через n узлов разбиения плоскости на правильные: а) треугольники; б) шестиугольники.

7 (см. [2]). Докажите, что если по крайней мере одна координата центра окружности иррациональна, то на самой окружности найдется не более двух точек с рациональными координатами.

8 (см. [2]). Докажите следующие утверждения.

а) Существуют окружности с центром в узле решетки \mathbb{Z}^2 , на которых нет ни одной рациональной точки.

б) Существуют окружности, которые содержат ровно одну рациональную точку.

в) Существуют окружности, которые содержат ровно две рациональные точки.

г) Если окружность с центром в начале координат $(0; 0)$ содержит по меньшей мере одну рациональную точку, то на такой окружности лежат бесконечно много рациональных точек плоскости.

9. На листе клетчатой бумаги с клетками размером 1×1 нарисована окружность радиуса R с центром в узле клетки. Докажите, что если на ней лежат ровно 1988 узлов сетки, то либо R , либо $R\sqrt{2}$ – целое число.

10. Докажите, что для любого четного n существует окружность с центром в точке $(1/3; 0)$, которая проходит ровно через n узлов решетки \mathbb{Z}^2 .

Список литературы

[1] Гильберт Д., Кон-Фоссен С. *Наглядная геометрия*. – М.: Наука, 1981.

[2] Серпинский В. *Сто простых, но одновременно и трудных вопросов арифметики*. – М.: Просвещение, 1961.

[3] Штейнгауз Г. *Сто задач*. – М.: Наука, 1976.

ДВЕ ЗНАМЕНИТЫЕ ФОРМУЛЫ

В.Вавилов, А.Устинов

Напомним, что целочисленной решеткой \mathbb{Z}^2 называется множество точек декартовой плоскости с целыми координатами. Бывает удобным представлять себе целочисленную решетку как бесконечный лист клетчатой бумаги. Многоугольник считается расположенным на \mathbb{Z}^2 , если все его вершины являются точками (узлами) этой решетки.

В статье речь пойдет о формуле Пика для вычисления площадей многоугольников, расположенных на целочисленной решетке, и об одной комбинаторной формуле Эйлера. Отдельное внимание будет уделено связи между ними.

Примитивные треугольники

Прежде чем изучать произвольные многоугольники на решетке, рассмотрим простейший (и важнейший!) частный случай. Предположим, что многоугольник является треугольником и кроме своих вершин не имеет внутри и на сторонах других узлов решетки. Такие треугольники называются *примитивными* (см. примеры на рисунке 1).

Их свойства мы сначала и изучим.

Теорема 1. *Треугольник является примитивным тогда и только тогда, когда он имеет площадь $1/2$.*

Доказательство. Пусть $T = ABC$ – примитивный треугольник. Рассмотрим минимальный прямоугольник с вершинами в узлах решетки \mathbb{Z}^2 и сторонами, параллельными осям координат, содержащий треугольник ABC . Из всех возможных случаев взаимного расположения треугольника и прямоугольника (рис.2) наиболее общей является ситуация, показанная на рисунке 2,г.

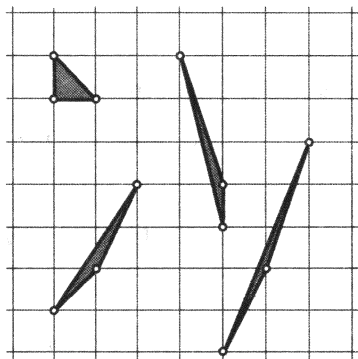


Рис. 1

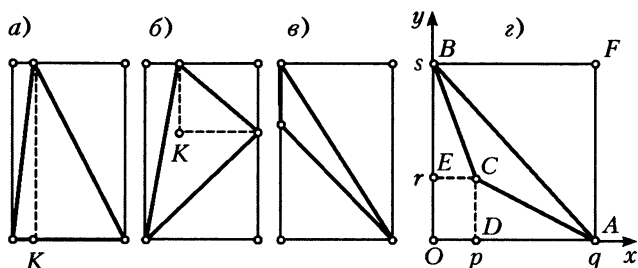


Рис. 2

Действительно, в случаях а) и б) треугольник T не является примитивным, так как точка K имеет целые координаты; случай г) включает в себя случай в), если предполагать, что вершина C может располагаться на OB или OA (в частности, может совпасть с O).

Будем считать, что точка O на рисунке 2,г является началом координат, $D = (p; 0)$, $A = (q; 0)$, $E = (0; r)$, $B = (0; s)$. Через $I(P)$ будем обозначать число узлов решетки, расположенных внутри многоугольника P , но не на его сторонах. Тогда

$$I(OAFB) = (q-1)(s-1).$$

Так как внутри отрезка AB не содержится узлов решетки, то

$$I(OAB) = I(OAFB)/2 = (q-1)(s-1)/2.$$

Аналогично,

$$I(ACD) = (q-p-1)(r-1)/2,$$

$$I(CBE) = (s-r-1)(p-1)/2.$$

Треугольник T не содержит внутри себя узлов решетки. Значит,

$$I(OAB) - I(ACD) - I(CBE) = pr,$$

где pr — число узлов решетки, расположенных внутри прямоугольника $ODCE$, но включая число узлов на его сторонах CD и CE (без точек D и E). Отсюда следует, что

$$(q-1)(s-1) - (q-p-1)(r-1) - (s-r-1)(p-1) = 2pr,$$

и, тем самым,

$$qs - ps - qr = 1.$$

Используя это равенство, получаем – здесь и далее $[F]$ обозначает площадь фигуры F –

$$[ABC] = [OAB] - [ACD] - [CBE] - [ODCE] = \\ = sq/2 - (p - q)r/2 - (s - r)p/2 - pr = (qs - ps - qr)/2 = 1/2 ,$$

что и дает прямое утверждение теоремы.

Докажем обратное утверждение, предположив противное: существует треугольник площади $1/2$, который не является примитивным.

Сначала покажем, что любой треугольник можно разбить на примитивные. Пусть внутри треугольника $T = ABC$ нет точек решетки, но имеются узлы решетки на одной из его сторон, скажем BC . Тогда соединим вершину A со всеми узлами решетки на стороне BC (рис.3). Все полученные треугольники, кроме ABP и AQC , окажутся примитивными, а у этих двух крайних треугольников имеется по две стороны, которые не содержат узлов решетки. Соединив точки P и Q с узлами решетки, находящимися на сторонах AB и AC соответственно, мы разобьем треугольники ABP и AQC на примитивные треугольники.

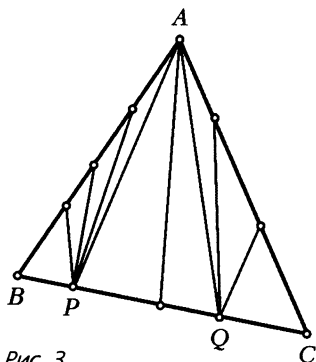


Рис. 3

Пусть у данного треугольника имеются узлы решетки внутри. Выбрав произвольный из них, соединим его отрезками с вершинами исходного треугольника ABC (рис.4). Проведенные отрезки разобьют ABC на три треугольника,

которые внутри себя содержат меньше внутренних узлов решетки, чем их имел треугольник ABC . Так как мы имеем дело с конечным числом узлов решетки, то, продолжая этот процесс, в какой-то момент мы разобьем треугольник ABC на треугольники, не содержащие внутри себя узлов решетки. Теперь разбиение на примитивные треугольники можно закончить, используя описанную ранее процедуру.

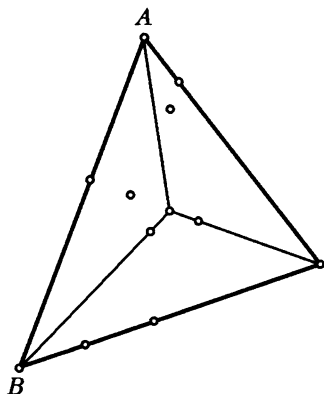


Рис. 4

Вернемся к доказательству достаточности. Разобьем треугольник T на примитивные. Согласно сделанному предположению, их будет не менее двух. Из прямого утверждения теоремы вытекает, что каждый из них имеет площадь $1/2$, а это невозможно, так как $T = 1/2$.

Упражнение 1. Докажите, что для любого сколь угодно большого числа M на решетке \mathbb{Z}^2 существует примитивный треугольник, все стороны которого больше этого числа M .

Формула Пика

Далее, если не оговорено противное, рассматриваются *простые* многоугольники, т.е. такие, которые ограничены замкнутой несамопересекающейся ломаной. На рисунке 5 показаны примеры многоугольников, которые простыми не являются.

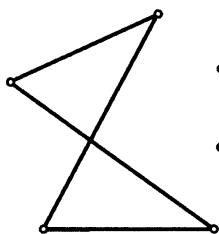


Рис. 5

заны примеры многоугольников, которые простыми не являются.

Теорема 2 (Г.Пик). Для любого простого многоугольника P на целочисленной решетке имеет место формула

$$[P] = N_i + N_e/2 - 1$$

где N_i — число узлов решетки, расположенных строго внутри многоугольника, и N_e — число узлов решетки, расположенных на его границе (включая вершины).

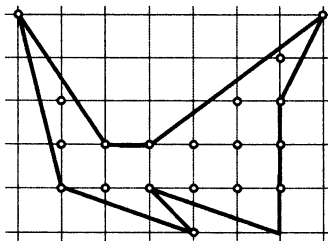


Рис. 6

Так, например, на рисунке 6 мы имеем: $N_i = 9$, $N_e = 11$, и, тем самым, по формуле Пика

$$[P] = 9 + 11/2 - 1 = 27/2.$$

Доказательство. Приступая к доказательству теоремы, во-первых, отметим, что любой простой многоугольник имеет по крайней

мере одну диагональ, которая целиком расположена внутри многоугольника.

Упражнение 2. Докажите это утверждение.

Отсюда и из принципа математической индукции следует, что любой простой k -угольник можно разбить на $(k - 2)$ треугольни-

ка, все вершины которых являются вершинами исходного многоугольника и, в частности, узлами решетки. Поэтому *сумма всех внутренних углов простого k -угольника равна $(k-2)\pi$.*

Во-вторых, каждый из полученных треугольников разобьем на примитивные так, как это делалось при доказательстве теоремы 1. Поскольку площадь каждого примитивного треугольника равна $1/2$, то число примитивных треугольников в разбиении равно $N = 2[P]$ и поэтому *не зависит от способа разбиения.*

Для завершения доказательства теоремы 2 осталось проверить равенство

$$N = 2N_i + N_e - 2.$$

Далее будем предполагать, что P является k -угольником. Его вершины также будут и вершинами некоторых примитивных треугольников разбиения (рис.7,а). Сумма углов треугольников при таких вершинах равна сумме внутренних углов многоугольника P и, тем самым, равна $180^\circ(k-2)$.

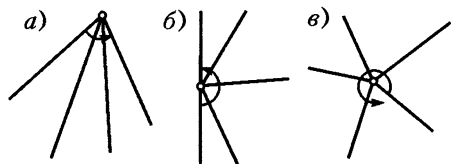


Рис. 7

Узел решетки, который находится на границе P , но не является его вершиной, также участвует в разбиении и служит вершиной некоторых примитивных треугольников (рис.7,б), а сумма всех углов при всех таких вершинах-узлах равна $180^\circ(N_e - k)$.

Каждая из N_i точек решетки (находящихся внутри P) участвует в разбиении на примитивные треугольники и является их вершинами. Сумма углов, сходящихся в такой точке, равна 360° (рис.7,в). Поэтому сумма всех углов всех примитивных треугольников с вершинами во внутренних узлах равна $360^\circ N_i$.

С другой стороны, сумма углов всех примитивных треугольников равна $180^\circ N$, и поэтому

$$180^\circ N = 360^\circ N_i + 180^\circ(N_e - k) + 180^\circ(k-2).$$

Следовательно, $N = 2N_i + N_e - 2$, и теорема 2 полностью доказана.

Замечание. Пусть плоскость разбита на равные параллелограммы двумя семействами параллельных прямых (это разбиение можно представлять себе как «косоугольную клетчатую бумагу»). Тогда вершины параллелограммов образуют множество,

которое называется *точечной решеткой* Λ . Целочисленная решетка – важный частный случай, когда параллелограммы являются квадратами.

Для многоугольника P на произвольной решетке Λ также справедлива формула Пика

$$[P] = (N_i + N_e \cdot 2 - 1) \Delta(\Lambda),$$

где $\Delta(\Lambda)$ – площадь каждого из параллелограммов. Доказательство проводится точно по той же схеме.

Логический анализ доказательства теоремы 2

Сформулируем еще раз три доказанных нами утверждения.

1°. Для любого простого многоугольника P на решетке \mathbb{Z}^2 имеет место формула Пика

$$[P] = N_i + N_e/2 - 1.$$

2°. Площадь любого примитивного треугольника на решетке \mathbb{Z}^2 равна $1/2$.

3°. В любом разбиении простого многоугольника на примитивные треугольники для их числа N справедлива формула

$$N = 2N_i + N_e - 2.$$

Проследим логические связи между этими утверждениями и сравним их «силу».

Если бы с самого начала была доказана формула Пика, то утверждение 2° было бы ее тривиальным следствием, а утверждение 3° следовало бы из 1° и 2° вместе взятых (рис.8,а). При таком подходе (а он возможен – см. упражнение 3) для проверки

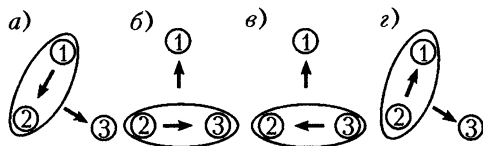


Рис. 8

всех трех утверждений нам понадобилось бы доказать формулу Пика независимо от 2° и 3°.

Мы избрали другой путь: сначала доказали утверждение 2° независимо, затем получили 3°, а формула Пика оказалась следствием их обоих (рис.8,б). Интересно проследить и за другими возможными логическими подходами к доказательству этих трех утверждений, показанными на рисунке 8,в и г.

Покажем, как из 3° следует 2°. Заметим сначала, что

площадь любого треугольника на решетке \mathbb{Z}^2 (а тем самым, и любого простого многоугольника на ней) выражается числом вида $n/2$. Для этого частично повторим рассуждения, использованные нами при доказательстве теоремы 1. Опишем вокруг треугольника минимальный прямоугольник со сторонами вдоль линий решетки. Как и раньше, возможны несколько случаев их взаимного расположения, показанных на рисунке 2. В каждом из них треугольник дополняется до прямоугольника фигурами, имеющими целую или полуцелую площадь. Таким образом, площадь любого треугольника на целочисленной решетке должна быть полуцелым числом, и, следовательно, эта площадь не меньше $1/2$.

Пусть теперь T – примитивный треугольник и P – минимальный прямоугольник, описанный около него. Разобьем все многоугольники, дополняющие T до P , на примитивные треугольники. В итоге получим разбиение P на примитивные треугольники $\{T_k\}$, один из которых совпадает с T .

Разобьем P на примитивные треугольники другим способом, проводя диагонали в каждой из pq составляющих его квадратных ячеек решетки.

Число примитивных треугольников во втором разбиении (а по условию 3° – и в первом) равно $2pq$. Значит,

$$\sum_{k=1}^{2pq} [T_k] = pq.$$

Каждое слагаемое в сумме, по доказанному, не меньше $1/2$. Поэтому равенство возможно лишь тогда, когда все слагаемые, в том числе и $[T]$, равны $1/2$.

Докажем импликацию $2^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Для этого рассмотрим функцию

$$F(P) = N_i + N_e \cdot 2 - 1,$$

определенную на всех простых многоугольниках, расположенных на решетке \mathbb{Z}^2 . Если разбить многоугольник P при помощи какой-либо ломаной с вершинами в узлах решетки на два других многоугольника P_1 и P_2 (в этом случае мы пишем $P = P_1 + P_2$; рис.9), то, как легко проверить, имеет место следующее аддитивное свойство:

$$F(P_1 + P_2) = F(P_1) + F(P_2).$$

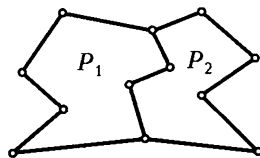


Рис. 9

Площадь обладает тем же свойством:

$$[P_1 + P_2] = [P_1] + [P_2].$$

Поэтому, если формула Пика верна для многоугольников P_1 и P_2 , то она верна и для многоугольника $P = P_1 + P_2$. Но так как любой простой многоугольник можно разбить на примитивные треугольники, а формула Пика для них по нашему предположению верна, то она верна и для произвольного многоугольника.

Подводя итоги проведенного логического анализа, заключаем, что самым «сильным» является утверждение 1°. Но нами установлено, что каждое из трех утверждений может быть получено как следствие любого другого. И в этом смысле они эквивалентны!

Упражнение 3. Используя аддитивность функции $F(P)$ и рассуждения из доказательства теоремы 1 об описанном прямоугольнике, найдите независимое (от 2° и 3°) доказательство формулы Пика.

Формула Эйлера

Связь утверждений 1° и 3°, отмеченная в предыдущем разделе, показывает, что формула Пика имеет также и комбинаторный характер.

Более общим, чем разбиение многоугольника на треугольники, является понятие карты. *Правильная многоугольная карта* – это такое разбиение простого многоугольника на другие простые многоугольники, когда любые два многоугольника либо имеют общую сторону, либо имеют только одну общую вершину, либо вообще не имеют общих точек.

Карту можно рассматривать как частный случай *плоского односвязного графа*. При таком подходе многоугольники разбиения являются гранями графа, а стороны многоугольников – *ребрами*.

Для плоских графов (а в частности, и многоугольных карт) имеет место знаменитая *формула Эйлера*, которая утверждает, что

$$V + F - E = 1,$$

где V обозначает число вершин графа, F – число граней, E – число ребер (рис.10).

Слово «карта» подчеркивает, что формула Эйлера имеет место и для «криволинейных разбиений» (рис.11), когда важна не форма линий, а только способ соединения точек с выполнением требования «правильности» (например, из разбиения пятиугольника на треугольники и четырехугольники, показанного на

$$\begin{aligned} V &= 10 \\ F &= 6 \\ E &= 15 \end{aligned}$$

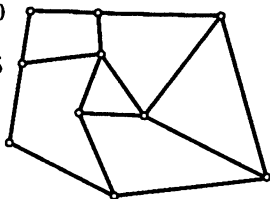


Рис. 10

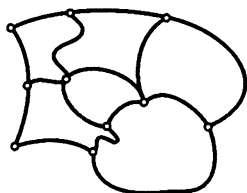


Рис. 11

рисунок 10, заменой отрезков кривыми линиями получается правильная криволинейная карта).

В случае когда все внутренние части правильной многоугольной карты являются треугольниками, говорят о *триангуляции* многоугольника.

Ясно, что любой простой многоугольник P на плоскости может быть триангулирован бесконечным числом способов. Однако для числа N треугольников в триангуляции всегда (а не только на \mathbb{Z}^2) будет справедлива та же формула $N = 2N_i + N_e - 2$, которая ранее была установлена только для многоугольников на решетке. Отметим, что здесь смысл чисел N_i и N_e уже несколько иной: N_i – число вершин графа, находящихся внутри P , а N_e – на границе P . Докажите эту формулу самостоятельно!

Другое свойство триангуляции связано с общим числом E всех сторон треугольников, входящих в триангуляцию:

$$E = 3N_i + 2N_e - 3.$$

Действительно, так как имеется N_e вершин на границе P , то существует N_e треугольников, одна сторона которых находится на границе P и $E - N_e$ сторон которых находятся строго внутри P , причем каждая такая «внутренняя сторона» принадлежит ровно двум треугольникам. Следовательно, $3N$ сторон у N треугольников включают каждую из $E - N_e$ сторон дважды и каждую из N_e сторон по одному разу. Таким образом,

$$3N = 2(E - N_e) + N_e = 2E - N_e.$$

Следовательно,

$$E = \frac{3N + N_e}{2} = \frac{3(2N_i + N_e - 2) + N_e}{2} = 2N_i + 2N_e - 3,$$

что и утверждалось.

Теорема 3 (Л.Эйлер). Для любой правильной многоугольной карты имеет место равенство

$$V + F - E = 1.$$

Доказательство. Пусть имеется правильная многоугольная (криволинейная) карта. Выберем внутри каждого многоугольника разбиения одну точку. Соединим ее с вершинами многоугольника линиями (не обязательно отрезками) так, чтобы они находились строго внутри этого многоугольника (см. пример на рисунке 12).

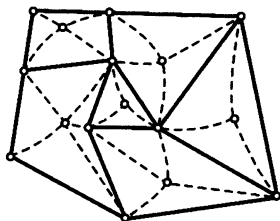


Рис. 12

Теперь заметим, что формула $E = 3N_i + 2N_e - 3$ справедлива и для вновь полученной «криволинейной триангуляции» R исходной карты. Для триангуляции R , очевидно, имеем

$$N_i + N_e = V + F.$$

Каждый треугольник в R одной своей стороной имеет ребро исходного графа, а две другие стороны – кривые, нами проведенные. Каждое новое ребро является общим для двух треугольников в R . Таким образом, удвоенное число новых ребер графа равно удвоенному числу треугольников. Поэтому для числа E' всех ребер в R имеем равенство

$$E' = E + N,$$

где N – число треугольников в R . Используя теперь еще и полученное выше равенство $3N = 2E' - N_e$, находим

$$\begin{aligned} V + F - E &= (N_i - N_e) - (E' - N) = N_i + N_e - (E' + N_e) = \\ &= N_i + N_e - (3N_i + 3N_e - 3)/3 = 1, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

4. Проведите рассуждения в обратную сторону, т.е. из формулы Эйлера $V + F - E = 1$ выведите равенство $N = 2N_i + N_e - 2$.

5. Докажите формулу Эйлера независимо, т.е. не пользуясь равенством $N = 2N_i + N_e - 2$.

Проведенные исследования позволяют сформулировать такой результат:

Формулы Эйлера и Пика, как и утверждения 1° – 3°, могут быть выведены друг из друга и также могут пониматься как эквивалентные формулы.

Продумайте соответствующие цепочки утверждений самостоятельно.

Формулы Пика и Эйлера могут быть обобщены на правиль-

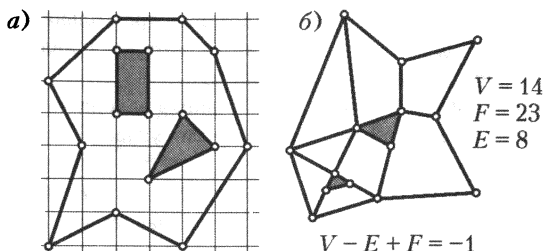


Рис. 13

ные карты с «лакунами» (отверстиями), которые сами являются простыми многоугольниками (рис.13,а).

Для таких многоугольников справедливы следующие результаты:

Теорема 4. Для любого простого многоугольника P с n лакунами на решетке \mathbb{Z}^2

$$[P] = N_i + N_e/2 - 1 + n ,$$

где N_i – число узлов решетки, расположенных внутри P , но не на границе лакун и не внутри лакун, а N_e – число узлов решетки, которые принадлежат границе P и границам всех лакун.

Теорема 5. Для любой простой многоугольной карты с n лакунами (в прежних обозначениях)

$$V - E + F = 1 - n.$$

Пример, иллюстрирующий эту теорему, приведен на рисунке 13,б.

Доказательства теорем 4 и 5 оставляем читателю в качестве полезных упражнений.

Упражнения

6 (Ю.И.Ионин). Три кузнечика (три точки) в начальный момент времени сидят в трех вершинах одной клетки, а затем начинают «играть в чехарду»: каждый может прыгнуть через одного из двух других, после чего оказывается в симметричной относительно него точке (рис.14). В каких тройках точек (с точностью до параллельного переноса) могут через несколько прыжков оказаться кузнечики?

7. Вершины треугольника являются узлами решетки \mathbb{Z}^2 и на его сторонах нет других

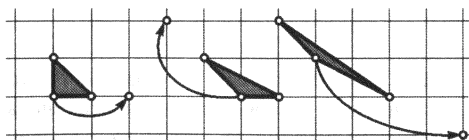


Рис. 14

узлов решетки. Докажите, что если такой треугольник внутри себя содержит ровно один узел решетки, то этот узел является центром пересечения медиан данного треугольника.

8. Пусть вершины выпуклого n -угольника находятся в узлах решетки \mathbb{Z}^2 , а внутри и на его сторонах нет других узлов решетки. Докажите, что $n \leq 4$.

9. Докажите, что для любых двух узлов A и B решетки \mathbb{Z}^2 , на отрезке между которыми нет других узлов, найдется узел C такой, что треугольник ABC примитивный. Чему равно расстояние от точки C до прямой AB , если точки A и B находятся на расстоянии d ?

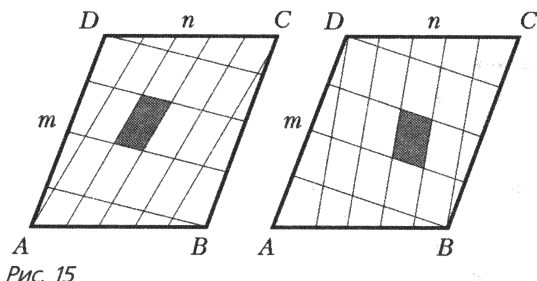
10 (Н.Б.Васильев). Докажите, что если решетку \mathbb{Z}^2 разбить на четыре непересекающиеся подрешетки с клетками 2×2 , то вершины любого примитивного треугольника решетки \mathbb{Z}^2 обязательно попадут в узлы трех разных указанных подрешеток.

11. На решетке \mathbb{Z}^2 отмечены $n \geq 3$ узлов так, что любые три из них образуют треугольник, медианы которого не пересекаются в узле этой решетки. Найдите наибольшее число n , при котором это возможно.

12 (Н.Б.Васильев). Шахматный король обошел доску 8×8 клеток, побывав на каждом поле ровно один раз и последним ходом вернувшись на исходное поле. Ломаная, соединяющая последовательно центры полей, которые проходил король, не имеет самопересечений. Какую площадь может ограничивать эта ломаная?

13. При любом расположении на плоскости квадрата размерами $n \times n$ он покрывает не более $(n+1)^2$ узлов целочисленной решетки \mathbb{Z}^2 . Докажите это.

14. В каждом из случаев, представленных на рисунке 15, вычислите площадь указанного параллелограмма, если стороны параллелограмма $ABCD$ разделены на n и m равных частей, а его площадь равна 1.



15. Каждая сторона треугольника ABC разделена на три равные части и одна из точек деления соединена с вершиной так, как это показано на рисунке 16. Сравните площадь выделенного треугольника с площадью треугольника ABC .

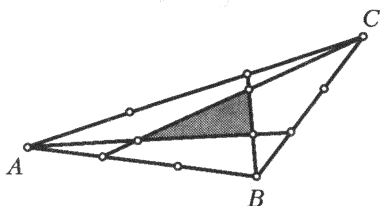


Рис. 16

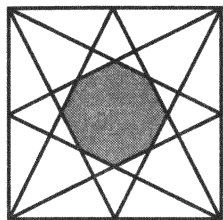


Рис. 17

16. Середины сторон квадрата соединены отрезками так, как это показано на рисунке 17. Найдите отношение площади квадрата к площади восьмиугольника, образованного проведенными отрезками.

17. Пусть

$$f(P) = aN_i(P) + bN_e(P) + c,$$

где a , b , c — некоторые числа. Пусть эта функция, заданная на всех простых многоугольниках, расположенных на целочисленной решетке \mathbb{Z}^2 , такова, что $f(P) = f(P_1) + f(P_2)$, если P разбит некоторой ломаной с вершинами в узлах решетки на два простых многоугольника P_1 и P_2 . Докажите, что $b = a/2$ и $c = -a$.

18. Докажите, что для любого простого многоугольника P на решетке \mathbb{Z}^2 имеет место равенство

$$2[P] = N(P) - 2N(P) + 1,$$

где $N(P)$ обозначает полное число узлов решетки, расположенных как внутри, так и на границе многоугольника P , а $2P$ — многоугольник, полученный из P растяжением в два раза относительно начала координат.

19. Укажите на плоскости 1000 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой и такие, что расстояние между любыми двумя точками выражается иррациональным числом, а площадь любого треугольника, с вершинами в этих точках, выражается рациональным числом.

ЛЕГКО ЛИ СКЛАДЫВАТЬ И УМНОЖАТЬ ДРОБИ

С.Гашков

«Конечно!» – скажет бойкий школьник, и, возможно, добавит, что это умели делать еще в древнем Египте сорок веков назад. «Это смотря какие дроби», – возразит знаток. Например, так называемые цепные, или непрерывные, дроби складывать или умножать совсем непросто – удобные алгоритмы для этого неизвестны (познакомиться с цепными дробями вы можете по статье Е.М.Никишина и Ю.В.Нестеренко в пятом номере «Кванта» за 1983 г. или по книжке А.Я.Хинчина «Цепные дроби»).

Но далее речь пойдет об обыкновенных дробях и их десятичных представлениях. Правила действий с ними действительно несложны и известны сейчас, надо надеяться, любому грамотному человеку. Однако так было не всегда, в чем можно убедиться, прочитав в интересно написанной книжке О.Оре «Приглашение в теорию чисел» (Библиотечка «Квант», выпуск 3) несколько строк из дневника Сэмюэля Пеписа, повествующие о том, с каким трудом он осваивал в тридцатилетнем возрасте таблицу умножения – а к тому времени (1662 г.) он уже получил в Кембридже степени бакалавра и магистра! Если уж говорить об умении действовать с дробями, то в средневековье владевших этим искусством людей во всей Европе, видимо, можно было пересчитать по пальцам – не случайно с тех времен и до наших дней в немецком языке сохранилась поговорка, буквально означающая «попасть в дроби».

Справедливости ради надо заметить, что трудности в действиях с обыкновенными дробями имеют объективную причину: две графически различные дроби могут оказаться равными по величине, как например $\frac{116690151}{427863887}$ и $\frac{3}{11}$ (пример заимствован из книги Ч.Тригга «Задачи с изюминкой»¹). По этой же причине по-настоящему строгое построение числовой системы рациональных чисел осуществляется только в университетском курсе математики, а каждый, кто хочет вполне овладеть искусством

Опубликовано в «Кванте» №3 за 1994 г.

¹ М., «Мир», 1975 г.

обращения с дробями, вынужден знакомиться с такими понятиями как наименьшее общее кратное (НОК), наибольший общий делитель (НОД), простые и составные числа и т.д.

Однако прекратим запугивать читателя и вспомним, что еще средневековые математики Ближнего Востока нашли простой подход к вычислениям с дробными числами – использование десятичных позиционных дробей. Позиционная десятичная система попала туда, видимо, из Индии, а позиционные дроби, правда не десятичные, а шестидесятеричные, были известны еще в древнем Шумере. Двадцатеричная система использовалась индейцами майя, а десятичные дроби впервые появились в древнем Китае. Но идея позиционной системы счисления не так тривиальна, как это кажется на первый взгляд – этой идеей не владели, например, великопленные математики Древней Греции. Заслуга введения в практику десятичных дробей и алгоритмов действия с ними принадлежит нидерландскому ученому и инженеру Симону Стевину (1548–1620). Сейчас эти алгоритмы с успехом работают в любом микрокалькуляторе, что вполне может привести к тому, что школьники совсем разучатся выполнять эти действия вручную.

Десятичные дроби имеют один недостаток, правда не сказывающийся на их применении и поэтому остающийся в тени. Именно, некоторые обыкновенные дроби невозможно точно выразить в виде конечных десятичных дробей, а лишь в виде бесконечных периодических дробей, причем период может начинаться не сразу после запятой, отделяющей целую и дробную части, а после так называемого предпериода. Такие примеры приведены, скажем, в книге Г.Радемахера и О.Теплица «Числа и фигуры»².

Вычисление периода и предпериода на практике не всегда простое дело. Попробуйте-ка вычислить период у безобидной с виду дроби $1/49$ (пример заимствован из упоминавшейся книги Ч.Тригга). Теоретически этот вопрос тоже не прост, и не случайно в школьных учебниках, как правило, отсутствует доказательство периодичности десятичных дробей, представляющих рациональные числа, и тем более какие-нибудь факты о длине периода. Мы не будем их здесь излагать, а отошлем читателя к упомянутой книге Г.Радемахера и О.Теплица. Напомним только несколько утверждений о периодах и предпериодах.

1. Правильная обыкновенная дробь $\frac{m}{n}$ представляется ко-

² Любое издание, например, М.: ЛКИ, 2007 г.

нечной десятичной дробью, если и только если n не делится на простые числа, отличные от 2 и 5.

Правильная обыкновенная несократимая дробь $\frac{m}{n}$ представляется десятичной дробью с периодом длиной t и предпериодом длиной k , если и только если $10^k(10^t - 1)$ делится на n , причем k и t – наименьшие натуральные числа, удовлетворяющие этому условию.

Дробь имеет чисто периодическое разложение, если и только если n не делится ни на 2, ни на 5.

2. Сумма длин периода и предпериода десятичного разложения любой правильной дроби со знаменателем n не превосходит $\varphi(n)$ – числа всех несократимых правильных дробей со знаменателем n . Равенство возможно лишь для дробей с чисто периодическим разложением.

3. Длина периода является делителем числа $\varphi(n)$, где n – знаменатель соответствующей обыкновенной дроби. Длина периода равна $\varphi(n)$ для бесконечно многих дробей, например $1/7^k$, $1/17^k$.

Из утверждения 3 следует, что $10^{\varphi(n)} - 1$ делится на n – это частный случай теоремы Эйлера; общий случай получится, если рассматривать позиционные дроби по произвольному основанию a .³

4. Длина периода десятичной записи дроби со знаменателем n не превосходит $n - 1$. Равенство возможно лишь при простом n .

Примерами таких n служат 7, 17, 29 и 1013, однако неизвестно, конечно или бесконечно их количество. Гаусс предположил, что оно бесконечно.

Функция $\varphi(n)$, упомянутая выше, называется функцией Эйлера. Если известны все простые делители p_1, \dots, p_m , то ее можно вычислить по формуле Эйлера

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right).$$

Напомним также, что наименьшее общее кратное натуральных чисел m и n – это наименьшее натуральное число, делящееся как на m , так и на n . Для него принято обозначение НОК(m ; n) или $[m; n]$. Наибольший общий делитель чисел m и n обозначается НОД(m ; n) или $(m; n)$.

³ См. также статью А.Егорова и А.Котовой «Необыкновенные арифметики» («Квант», 1983 г., № 3/4).

Упражнение 1. Докажите, что длина предпериода у десятичного разложения правильной дроби со знаменателем n не превосходит $\log_3 \frac{n}{3}$. Равенство достигается для несократимых дробей со знаменателем $3 \cdot 2^k$ и только для них.

Сложение дробей

Разумеется, для выполнения действий над периодическими дробями можно обратить их в обыкновенные дроби, выполнить нужные действия, а затем результат разложить в десятичную дробь. Однако при таком способе действий трудно понять, какой будет длина периода у получившейся дроби, так что дальше мы будем поступать несколько иначе.

Нам понадобится еще один подход к десятичным дробям. Рассмотрим, например, дробь $\alpha = 0,79(123)$. Ее можно записать в виде суммы

$$\alpha = \frac{79}{100} + \frac{123}{100 \cdot 1000} + \frac{123}{100 \cdot 1000^2} + \dots + \frac{123}{100 \cdot 1000^k} + \dots$$

Слагаемые, начиная со второго, образуют убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{123}{100}$.

Суммируя эту прогрессию по известной формуле ($a + aq + aq^2 + \dots = 1/(q-1)$ при $|q| < 1$), получаем

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{79}{100} + \frac{123}{100000 \left(1 - \frac{1}{1000}\right)} = \frac{79}{100} + \frac{123}{100 \cdot 999} = \\ &= \frac{79(10^3 - 1) + 123}{99900} = \frac{6587}{8325} \end{aligned}$$

(сравните этот способ с описанным у Радемахера и Теплица).

В общем виде для дроби $\alpha = 0, \alpha_1 \dots \alpha_k (\alpha_1 \dots \alpha_t)$ ($\alpha_i, i = 1, 2, \dots, k$ и $a_j, j = 1, 2, \dots, t$ — цифры десятичного разложения) получаем

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{a}{10^k} + \frac{A}{10^k \cdot 10^t} + \frac{A}{10^k \cdot 10^{2t}} + \dots + \frac{A}{10^k \cdot 10^{nt}} + \dots = \\ &= \frac{a}{10^k} + \frac{A}{10^k (10^t - 1)}, \end{aligned}$$

здесь $a = \overline{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ — предпериод, а $A = \overline{a_1 \dots a_t}$ — период дроби α .

В дальнейшем, чтобы не употреблять слишком часто слов «длина периода», будем говорить, что *период дроби равен n* ,

если он состоит из n цифр. То же будет относиться и к предпериоду. Это означает, что если a_k — k -я цифра после запятой, то $a_{k+n} = a_k$ при достаточно больших k . В частности, дробь

$$\frac{1}{10^k(10^t - 1)} = 0, \underbrace{0 \dots 0}_k 1 \left(\underbrace{00 \dots 01}_t \right)$$

имеет предпериод k и период t .

Теперь заметим, что в принципе мы можем считать, что дробь с периодом n имеет также периоды $2n, 3n, \dots$, вообще pn при любом натуральном p , ибо $a_{k+pn} = a_k$. Кроме того, если предпериод дроби равен k , то мы можем начинать отсчитывать периоды с любого $m \geq k$ — дробь будет по-прежнему периодической, а период будет той же длины, но может начинаться с другого места, т.е. записываться несколько иначе.

Таким образом, всякая периодическая дробь имеет много периодов. Разумеется, наибольший интерес представляет *наименьший из них*.

Лемма 1. Для всякой периодической последовательности $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ *наименьший период является делителем любого другого ее периода*.

Доказательство. Пусть n — некоторый период последовательности $\{a_k\}$, t — ее наименьший период, и n не делится на t . Тогда $n = qt + r$, где $0 < r < t$, причем $a_k = a_{k+n} = a_{k+qt+r} = a_{k+r}$ для любого k . Но это означает, что число r , *меньшее t* , тоже является периодом последовательности $\{a_n\}$. Противоречие.

Некоторое представление о том, какими могут быть наименьшие периоды суммы и разности двух дробей, дает следующая лемма.

Лемма 2. *Предпериод суммы (разности) двух дробей не больше максимума их предпериодов, а наименьший период суммы (разности) является делителем наименьшего общего кратного их периодов.*

Доказательство этой леммы вы получите, решив следующие упражнения.

Упражнения

2. Докажите, что при сложении дробей $\alpha = 0, \alpha_1 \dots \alpha_k (a_1 \dots a_t)$ и $\beta = 0, \beta_1 \dots \beta_k (b_1 \dots b_t)$ получается дробь $\alpha + \beta$ с предпериодом k и периодом t , причем цифры периода находятся по следующему правилу: если $A = \overline{a_1 a_2 \dots a_t}$, $B = \overline{b_1 b_2 \dots b_t}$, то в периоде будет стоять $A + B$, если $A + B < 10^t - 1$, и $A + B - 10^t + 1$, если $A + B > 10^t - 1$. Если же

$A + B = 10^t - 1$, то период состоит из одних девяток и получается дробь, эквивалентная дроби с «хвостом» из одних нулей.

3. Докажите, что период разности $\alpha - \beta$ состоит из цифр числа $A - B$, если $A - B > 0$, и $10^t - (B - A)$, если $A - B < 0$.

Лемма 3. Сумма и разность дробей $\frac{1}{10^{k_1}(10^{t_1} - 1)}$ и $\frac{1}{10^{k_2}(10^{t_2} - 1)}$, имеющих предпериоды k_1 и k_2 и периоды t_1 и t_2 , имеют предпериоды $\max(k_1; k_2)$ и периоды $\text{НОК}(t_1; t_2) = [t_1; t_2]$.

Упражнение 4. Докажите лемму 3.

Итак, из леммы 1 следует оценка наименьшего периода суммы двух дробей, а лемма 2 показывает, что эта оценка точная. Однако, как показывает пример дробей $\alpha = 0, (03)$ и $\beta = 0, (30)$, $\alpha + \beta = 0, (33) = 0, (3)$, наименьший период суммы, вообще говоря, не равен наименьшему общему кратному их периодов.

Может показаться, что любой делитель НОК периодов может быть периодом суммы дробей. Но и это неверно.

Упражнение 5. Приведите пример, подтверждающий сказанное.

Пусть теперь m и n — наименьшие периоды дробей α и β соответственно, а t — наименьший период их суммы. Тогда дробь $\alpha = (\alpha + \beta) - \beta$ имеет период $[t; n]$ (вообще говоря, не наименьший). Значит, $[t; n]$ делится на m . Аналогично $[t; m]$ делится на n , т.е. $[t; m]$ делится на $[m; n]$. Пусть p_1, p_2, \dots, p_k — все простые числа, входящие в разложения на простые множители чисел m и n в разных степенях так, что $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} u$ и $n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k} u$ (где $\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$, $\alpha_i \neq \beta_i$ при $i = 1, 2, \dots, k$, а u взаимно просто с p_1, \dots, p_k).

Мы выделяем простые делители чисел m и n , входящие в их канонические разложения на множители в разных степенях. Пусть $]m; n[= p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_k^{\gamma_k}$, где $\gamma_i = \max(\alpha_i; \beta_i)$.

Например, для чисел $1650 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11$ и $2100 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$ имеем $p_1 = 2$, $p_2 = 7$, $p_3 = 11$ и $]1650; 2100[= 2^2 \cdot 7 \cdot 11 = 308$.

Теперь мы можем сформулировать теорему.

Теорема 1. Наименьший период t суммы и разности двух периодических дробей с периодами m и n делится на $]m; n[$.

Доказательство. Выше мы доказали, что $[t; m]$ делится на n , а $[t; n]$ делится на m . Пусть простое число p_i входит в разложение t на множители в степени δ_i . Тогда $\alpha_i \leq \max(\delta_i; \beta_i)$, $\beta_i \leq \max(\delta_i; \alpha_i)$ (здесь мы воспользовались тем, что если про-

стое число p входит в разложение на множители числа a в степени s , а число b – в степени q , то в разложение на множители $\text{НОК}(a; b) = [a; b]$ оно входит в степени $\max(s; q)$. Отсюда следует, что $\delta_i \geq \gamma_i$. Но это и значит, что t делится на $]m; n[$. Аналогично утверждение доказывается и для разности $\alpha - \beta$. Теорема доказана.

Из теоремы 1 в частности следует, что если m и n взаимно просты, то период суммы и разности равен mn .

Теорема 2. Любой делитель числа $]m; n[$, делящийся $t =]m; n[$, может быть наименьшим периодом суммы дробей с периодами m и n .

Доказательство. Если $m = n = 1$, доказывать нечего. Заметим, что если $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \cdot u$, $n = p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k} \cdot u$, то $]m; n[= \left[\frac{m}{u}; \frac{n}{u} \right]$. Пусть $m' = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, $n' = p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}$. Тогда $]m; n[=]m'; n'[\cdot u = [m'; n'] \cdot u$. Предположим, что число t – некоторый делитель $]m; n[$, делящийся на $]m'; n'[$. Тогда $t =]m'; n'[\cdot u'$, где u' – делитель числа u , причем оба числа u' и u взаимно просты с m' и n' . Рассмотрим дроби

$$a = \frac{1}{10^u - 1} + \frac{1}{10^{n'u'} - 1} \quad \text{и} \quad b = \frac{1}{10^{m'} - 1} - \frac{1}{10^u - 1},$$

если последняя дробь положительна (в противном случае прибавим к b единицу – длина периода при этом не изменится).

Тогда $a + b = \frac{1}{10^{n'u'} - 1} + \frac{1}{10^{m'} - 1}$ (или на 1 больше, что не существенно). По лемме 2, периоды дробей a , b и $a + b$ равны соответственно $[u; n'u'] = n'u = n$, $[m'; u] = m'u = m$, $[n'u'; m'] = [n'; m']u' = t$. Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 мы сразу получаем решение задачи M1399:

а) Поскольку $[6; 12] = 12$, а $]6; 12[= 4$, периодами могут быть только 4 и 12.

б) Так как $[12; 20] = 60$, $]12; 20[= 15$, наименьшими периодами сумм и разностей дробей могут быть 15, 30 и 60.

О периоде произведения

Рассмотрим вопрос о предпериоде и периоде произведения дробей.

Теорема 3. Если две дроби имеют предпериоды k_i и периоды t_i ($i = 1, 2$), то их произведение имеет предпериод $k \leq k_1 + k_2$ и период $t \leq [t_1; t_2](10^{(t_1, t_2)} - 1)$.

Эти неравенства точные и достигаются для уже знакомых нам дробей

$$\frac{1}{10^{k_i}(10^{t_i} - 1)}, \quad i = 1, 2.$$

Из теоремы 3 следует, в частности, что если периоды дробей взаимно просты, то период их произведения не превосходит удвоенного НОК их периодов, но если периоды имеют большой наибольший общий делитель (НОД), то период произведения может их значительно превосходить. Так, при возведении в квадрат дроби с периодом t может получиться период $t(10^t - 1)$ и не может получиться больший (последняя задача предлагалась в 1990 г. на Московской математической олимпиаде школьников).

Для доказательства нам понадобятся некоторые широко известные факты.

Пусть u, v — натуральные числа. Разделив u на v с остатком, получим $u = qv + r$, где $0 \leq r < v$. Тогда $(u; v) = (v; r)$.

Пользуясь этим утверждением, можно доказать, что существуют такие *целые* числа x и y , что $ux + vy = (u; v)$.

Кроме того, справедливо равенство $[u; v] \cdot (u; v) = uv$ (его нетрудно получить, пользуясь основной теоремой арифметики о существовании и единственности разложения на простые множители).

Нам понадобится также следующее утверждение.

Упражнение 6. Пусть $u = qv + r$, $0 \leq r < v$, $u, v \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{Z}$. Тогда остаток от деления $10^u - 1$ на $10^v - 1$ равен $10^r - 1$. Выведите отсюда, что $(10^u - 1, 10^v - 1) = 10^{(u, v)} - 1$.

Пусть даны две дроби с предпериодами k_i и периодами t_i ($i = 1, 2$). Можно считать, что они имеют знаменатели $10^{k_i}(10^{t_i} - 1)$. Перемножая знаменатели и используя еще раз упомянутое утверждение, получаем, что *предпериод произведения дробей удовлетворяет неравенству $k \leq k_1 + k_2$, а период не превосходит наименьшего натурального t такого, что число $10^t - 1$ делится на число $(10^{t_1} - 1)(10^{t_2} - 1)$.*

Найдем наименьшее t , обладающее этим свойством.

Из утверждения упражнения 6 следует, что $t = t_1 n$, $n \in \mathbb{N}$, так как $10^t - 1$ делится на $10^{t_1} - 1$, а значит, t делится на t_1 .

Кроме того, t делится на t_2 , поэтому n делится на $d = \frac{t_2}{(t_1, t_2)}$. Тогда согласно известному тождеству (формуле суммирования геомет-

рической прогрессии) $10^t - 1 = (10^{t_1} - 1)(1 + 10^{t_1} + \dots + 10^{(n-1)t_1})$, и поэтому $1 + 10^{t_1} + \dots + 10^{(n-1)t_1}$ должно делиться на $10^{t_2} - 1$.

Рассмотрим последовательность r_1, r_2, r_3, \dots остатков от деления чисел $t_1, 2t_1, 3t_1, \dots$ на число t_2 .

Согласно упражнению 6, последовательность остатков деления чисел $10^{t_1}, 10^{2t_1}, 10^{3t_1}, \dots$ на число $a = 10^{t_2} - 1$ есть $10^{r_1}, 10^{r_2}, 10^{r_3}, \dots$

Докажем, что последовательность r_1, r_2, r_3, \dots периодическая с длиной периода d и ее период $r_1, r_2, r_3, \dots, r_d$ состоит из всех различных чисел из промежутка от 0 до $t_2 - 1$, делящихся на $b = (t_1, t_2)$, и заканчивается нулем. Последнее очевидно, так как dt_1 делится на t_2 , откуда следует также периодичность с периодом d . Остается проверить, что все они разные, откуда вытекает также, что d — минимальный период. Допустим противное, например $r_i = r_j$, тогда $(j - i)t_1$ делится на t_2 и $0 < j - i < d$. Противоречие.

Из доказанного следует, что последовательность остатков от деления чисел $10^{t_1}, 10^{2t_1}, 10^{3t_1}, \dots$ на число a периодическая с длиной периода $d = t_2 / (t_1, t_2)$ и ее период $10^{r_1}, 10^{r_2}, \dots, 10^{r_d}$ состоит из переставленных в каком-то порядке чисел $1, 10^b, 10^{2b}, \dots, 10^{(d-1)b}$.

Поэтому остаток от деления на a числа $s = 1 + 10^{t_1} + \dots + 10^{(n-1)t_1}$ равен при $n = dm$ остатку от деления на a числа

$$m(1 + 10^b + 10^{2b} + \dots + 10^{(d-1)b}) = m \frac{10^{db} - 1}{10^b - 1} = m \frac{10^{t_2} - 1}{10^b - 1}.$$

Следовательно, при $n = (10^b - 1)d$ число s делится на a , а при меньших натуральных n — нет. Вспоминая доказанное выше, выводим отсюда, что *наименьшее натуральное t , при котором $10^t - 1$ делится на $(10^{t_1} - 1)(10^{t_2} - 1)$, есть*

$$t_1 n = (10^b - 1) d t_1 = \frac{(10^b - 1) t_1 t_2}{(t_1, t_2)} = [t_1; t_2] (10^{(t_1, t_2)} - 1),$$

откуда и следует вторая верхняя оценка теоремы 3.

Рассмотрим теперь дроби $\frac{1}{10^{k_i} (10^{t_i} - 1)}$, $i = 1, 2$. Из упражнения 6 следует, что предпериод их произведения равен $k_1 + k_2$, а

период равен минимальному натуральному t такому, что $10^t - 1$ делится на $(10^{t_1} - 1)(10^{t_2} - 1)$.

Но по доказанному выше таким числом является $t = [t_1; t_2](10^{(t_1, t_2)} - 1)$.

Теорема 3 дает оценку периода произведения двух дробей.

В заключение мы предлагаем вам подумать о том, какими вообще могут быть периоды произведений дробей α и β с периодами m и n . Сумеете ли вы найти правило, аналогичное теоремам 1 и 2 для сумм и разностей?

ОПТИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ И ПРОЕКТИВНАЯ ПЛОСКОСТЬ

В.Дубровский, Я.Смородинский

Что общего между двумя темами, вынесенными в заглавие? Ответ будет интересным, он будет также и полезным. Мы познакомимся с ярким примером физической теории, превратившейся, по существу, в математическую. Такое превращение претерпели многие разделы физики. Все начинается с наблюдений, гипотез, с их экспериментальной проверки. Но по мере постижения сути предмета выкристаллизовывается несколько основных предпосылок, своего рода постулатов, из которых все результаты можно вывести уже чисто логическим путем. У нас речь пойдет о геометрической оптике. Начнем с того, что вспомним, как возникает изображение в оптической системе. А кончим... Но расскажем все по порядку.

Изображения и отображения

Для того чтобы оптическая система работала, необходимо, чтобы пучок лучей света, исходящих из точечного источника (в геометрии такой пучок называется *центральный*), после прохождения системы снова превратился в центральный пучок. Тогда в центре преобразованного пучка возникнет изображение источника. Причем изображение может создаваться двумя путями: либо сами лучи света, выходя из оптической системы, собираются в одну точку – тогда говорят о *действительном изображении*; его можно увидеть, поместив в эту точку киноэкран или фотопленку (рис.1,а); либо лучи на выходе из

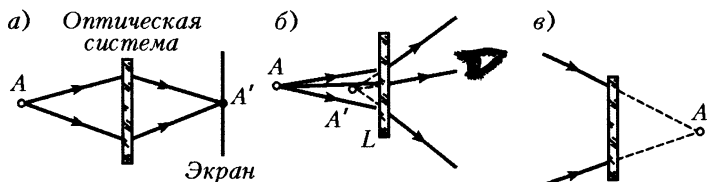


Рис.1. Два типа источников света и их изображений: а – источник и изображение действительные; б – источник действительный, изображение мнимое; в – мнимый источник

системы образуют расходящийся пучок, но их продолжения проходят через одну точку – тогда изображение называется *мнимым*, хотя его-то как раз и можно увидеть непосредственно (рис.1,б). Наконец, если пучок лучей, поступающий в оптическую систему, является сходящимся (рис.1,в), то говорят о *мнимом источнике*. Чем выше качество системы, тем точнее фокусируются пучки лучей. В идеале каждый точечный источник (действительный или мнимый) A имеет точечное изображение A' (также того или другого типа). Возникает отображение p , сопоставляющее точке A точку A' . Вот мы и постараемся выяснить, как устроено это отображение.

Начнем с простейшей «оптической системы» – плоского зеркала. Едва ли здесь что-то нужно объяснять: очевидно, что отображение p является *симметрией* относительно плоскости. Это отображение можно рассматривать для всех точек, в том числе и для точек «Зазеркалья»: мнимый источник в «Зазеркалье» создает действительное изображение перед зеркалом (рис.2).

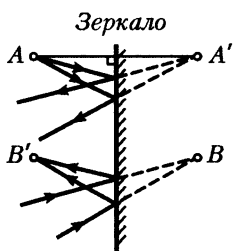


Рис.2. Отражение в зеркале действительного (A) и мнимого (B) источников

Второй пример – преломление света на плоской границе двух сред. Строго говоря, здесь изображение не создается. Чтобы лучи, выпущенные из одной точки, образовали после преломления центральный пучок, для них должно быть постоянно отношение $\text{tg } \varphi' / \text{tg } \varphi$, где φ и φ' – углы, составляемые падающим и преломленным лучом с нормалью к плоскости раздела сред (см. рис.3). А в действительности преломление происходит по закону Снеллиуса: $\sin \varphi' / \sin \varphi = k$. Однако для лучей, почти перпендикулярных границе сред, т.е.

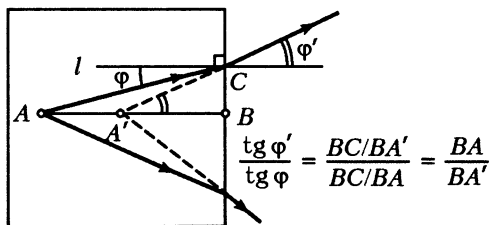


Рис.3. Для того чтобы центральный пучок лучей после преломления оставался центральным, закон преломления должен был бы иметь вид $\text{tg } \varphi' / \text{tg } \varphi = \text{const}$

с малыми углами φ и φ' , синусы в последней формуле можно с большой точностью заменить на тангенсы, поэтому мы все же можем говорить об изображении (мнимом) и даже увидеть его, заглянув, например, в аквариум. Поскольку коэффициент k зависит только от сред, соответствующее отображение p будет *растяжением* от плоскости раздела, т.е. каждая точка перемещается перпендикулярно этой плоскости так, что ее расстояние до плоскости изменяется в одно и то же число раз (а именно, делится на k ; при $k > 1$ естественнее назвать это отображение *сжатием*).

А как устроено отображение p для более сложных оптических систем? Оказывается, ответить на этот вопрос можно почти не вдаваясь в физические детали. Все, что нам необходимо, — это постулировать наличие точечного изображения любого точечного источника.

Для простоты мы предположим, что все происходит не в пространстве, а на плоскости α — на ней расположены и источники, и их изображения. В наших примерах ею могла бы быть любая плоскость, перпендикулярная поверхности зеркала или границе сред, а если рассматривается линза или система линз, имеющие ось симметрии, — любая плоскость, проходящая через эту ось. Толщиной нашей системы мы пренебрежем; тогда ее можно изобразить прямой линией l на плоскости α , при встрече с которой лучи преломляются так, что центральный пучок с центром A преобразуется снова в центральный пучок с центром $A' = p(A)$ (рис.4,а).

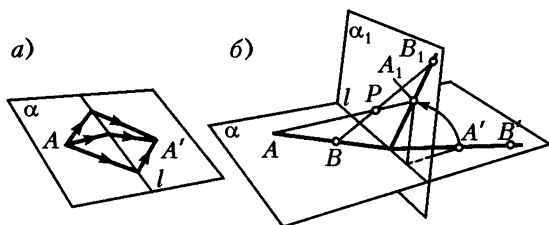


Рис.4. С помощью выхода в пространство построение изображения в линзе сводится к центральной проекции

Теперь мы совершим выход в пространство. Представим, что у нас имеется два совпадающих экземпляра плоскости α . На первом будем отмечать источники, на втором — их изображения. Повернем второй экземпляр вместе со всеми изображениями вокруг оси l (рис.4,б) — получится плоскость α_1 . Возьмем произвольную точку A , отметим ее изображение A' и соответ-

ствующую точку A_1 в плоскости α_1 . Сейчас мы докажем, что *все прямые AA_1 будут либо параллельны, либо будут пересекаться в одной точке*.

Заметим, что четыре точки A, B, A_1 и B_1 всегда лежат в одной плоскости, ведь луч света, проходящий через A и B , после преломления на прямой l пройдет через A' и B' (рис.4,6); поэтому прямые AB и A_1B_1 тоже пересекаются. (Если же прямая AB параллельна l , то, как легко понять, прямая A_1B_1 тоже параллельна l .) Следовательно, прямые AA_1 и BB_1 всегда либо параллельны, либо пересекаются. Допустим, что не все такие прямые параллельны, например AA_1 пересекается с BB_1 в точке P . Для любой точки C вне прямой AB прямая CC_1 лежит в одной плоскости с AA_1 и в одной плоскости с BB_1 (рис.5). Поэтому она является прямой пересечения этих плоскостей, а значит, проходит через их общую точку P . Для точек, лежащих на AB , доказательство проводится аналогично, только пару точек A, B надо заменить на A, C , где C не лежит на AB .

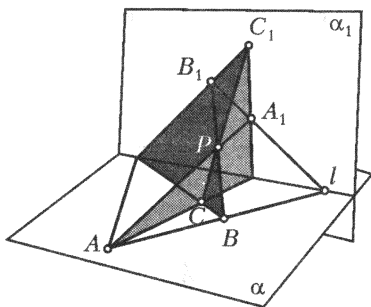


Рис.5. К доказательству существования центра проекции

Доказанное утверждение можно переформулировать следующим образом: *отображение p_1 , сопоставляющее точке A плоскости α соответствующую точку A_1 плоскости α_1 , является параллельной или центральной проекцией*.

Ясно, что в рассмотренных нами примерах зеркального отражения и преломления отображение p_1 – это параллельная проекция. Но в случае линзы параллельная проекция уже возникнуть не может, хотя бы потому, что при такой проекции параллельные прямые переходят в параллельные, а линза, как известно, фокусирует параллельные лучи в точку. Поэтому для линзы и других оптических систем, превращающих параллельные пучки в центральные, отображение p_1 является центральной проекцией. А поскольку все прямые A_1A' в силу нашего построения параллельны друг другу, можно сделать вывод, что преобразование p плоскости, описывающее изображение в линзе, является композицией центральной проекции ($A \rightarrow A_1$) и параллельной проекции ($A_1 \rightarrow A'$). Для оптических приборов, состоящих из нескольких линз и зеркал, отображение p будет

композицией нескольких центральных и параллельных проекций. По определению, такие отображения называются проективными.

Центральная проекция и формула линзы

Прежде чем пожинать плоды наших построений применительно к линзе, сделаем существенную оговорку. Лучи, выпущенные из одного источника, фокусируются линзой в точку лишь тогда, когда они проходят вблизи от главной оптической оси (прямой, проходящей перпендикулярно к линзе через ее центр). Мы допускаем идеализацию, рассматривая отображение p на всей плоскости. Но истина от этого не страдает, потому что все наши рассуждения можно с тем же успехом повторить и для любой, даже сколь угодно малой области на плоскости.

Итак, применим к линзе наше построение. Пусть a — ее

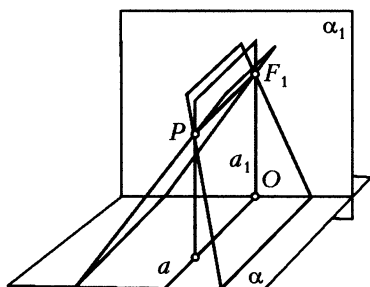


Рис. 6. Построение фокусов линзы

главная оптическая ось, a_1 — соответствующая ей прямая в

плоскости α_1 , P — центр проекции p_1 . Ясно, что все прямые, параллельные a , при этой проекции перейдут в прямые, проходящие через одну и ту же точку F_1 прямой a_1 (рис. 6) — параллельную проекцию точки P на плоскость α_1 вдоль прямой a . Следовательно, пучок лучей, параллельных главной оси, пройдя линзу, собирается в точке F' главной оси (рис. 7), соответствующей точке

F_1 : $OF' = OF_1$, где O — центр линзы. Аналогично, лучи, выходящие из точки F — проекции P на плоскость α вдоль

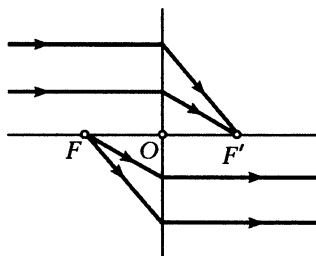


Рис. 7. Оптические свойства фокусов

прямой a_1 , пройдя линзу, становятся параллельными главной оси. Точки F и F_1 называются *фокусами* линзы. Можно доказать, что для системы из одной линзы фокусные расстояния $f = OF$ и $f' = OF'$ одинаковы; для более сложных систем они могут быть различны.

Зная положение фокусов, легко построить изображение любой точки A , не лежащей на главной оси, проследив за двумя исходящими из

нее лучами — лучом, параллельным оси, и лучом, проходящим через фокус F (рис.8). Это построение хорошо известно. Подчеркнем еще раз, что мы с необходимостью пришли к нему, основываясь по сути дела только на нашем «постулате о точечном изображении». На рисунке 8 показано, как строится изображение точки

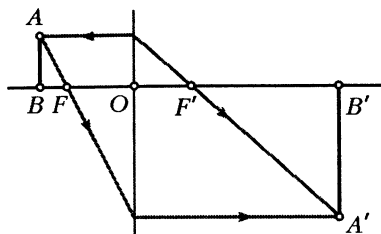


Рис. 8. Построение изображения по фокусам

B на главной оси. Здесь мы пользуемся тем, что изображением прямой AB , перпендикулярной этой оси, является прямая $A'B'$, также ей перпендикулярная, — факт, очевидный из рассмотрения нашей центральной проекции. Столь же просто устанавливаются с помощью центральной проекции и другие свойства изображений, создаваемых идеальной линзой. Ясно, например, что изображением любой прямой будет прямая (попробуйте доказать это, пользуясь непосредственно построением рисунка 8!). Правда, строго говоря, это свойство выполняется с одним исключением: прямая, проходящая через фокус F перпендикулярно главной оси, никак не изображается, потому что лучи, выходящие из любой ее точки, преобразуются линзой в параллельные. К этому важному замечанию мы еще вернемся.

Как связаны расстояния $r = OA$ и $r' = OA'$ от центра линзы O до точки A на главной оси и до ее изображения A' ? И здесь ответ легко получается с помощью центральной проекции. Из рисунка 9 видно, что

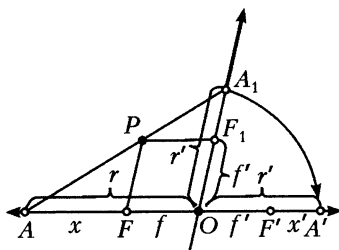


Рис.9. $f/r + f'/r' = 1$ (формула линзы)

$$\frac{OF}{OA} + \frac{OF'}{OA'} = \frac{OF}{OA} + \frac{OF_1}{OA_1} = \frac{A_1P}{A'A} + \frac{PA}{A'A} = \frac{A'A}{A'A} = 1,$$

т.е.

$$\frac{f}{r} + \frac{f'}{r'} = 1. \quad (1)$$

В частности, при $f = f'$ выполняется так называемая «формула линзы» $1/r + 1/r' = 1/f$. Эти равенства останутся в силе и для точек A на отрезке OF и на луче OF' , если считать все отрезки

направленными, а величины r и r' – координатами точек A и A' на главной оси с началом в точке O . При этом положительную полуось нужно выбрать по-разному: для точек A – луч OF , а для изображений A' – луч OF' . Тогда положительные значения r и r' будут отвечать действительным источникам и изображениям, а отрицательные – мнимым (рис.10).

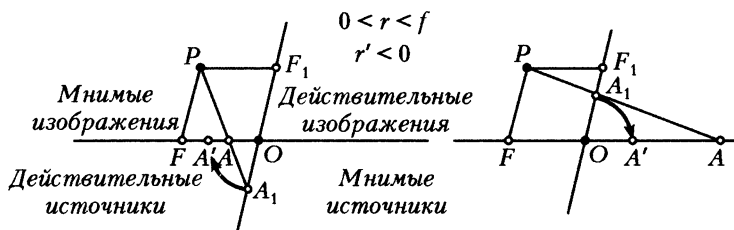


Рис.10. Формула линзы верна при любом положении источника на главной оптической оси

Формулу (1) можно сделать более компактной, перенеся начало отсчета на «оси источников» в фокус F , а на «оси изображений» – в F' . Полагая в (1) $r = f + x$, $r' = f' + x'$ (см. рис.9), после простых преобразований получим

$$xx' = ff' \quad (2)$$

– эта формула была известна еще Ньютону. На рисунке 11 она доказывается для $x > 0$ непосредственно; аналогичное доказательство для других значений x предоставим читателю.

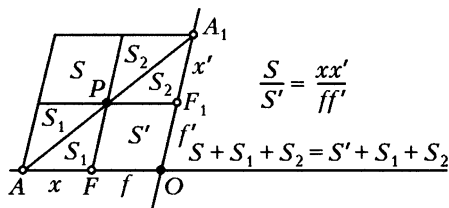


Рис.11. Вывод формулы линзы в осях x и x'

Проективные преобразования прямой и двойное отношение

Выразим в формулах (1) и (2) координату изображения через координату источника:

$$r' = \frac{f'r}{r-f} \quad \text{или} \quad x' = \frac{ff'}{x}.$$

В обоих случаях преобразование координаты записывается *дробно-линейной функцией*, т.е. функцией вида $y = (ax + b)/(cx + d)$. Обратно, переписав последнее равенство в виде

$$\left(y - \frac{a}{c}\right)\left(x + \frac{d}{c}\right) = \frac{bc - ad}{c^2},$$

аналогичном (2), убеждаемся, что любую дробно-линейную функцию, отличную от линейной ($c \neq 0$) и от постоянной ($bc - ad \neq 0$), можно геометрически представить как центральную проекцию одной координатной оси на другую при соответствующем выборе осей и центра проекции.

Параллельные проекции, как легко понять, выражаются линейными функциями $y = ax + b$. А поскольку композиция любого числа линейных и дробно-линейных функций снова будет дробно-линейной функцией², всякое проективное преобразование прямой выражается в координатах дробно-линейной функцией.

Отсюда, между прочим, следует, что проективное преобразование прямой полностью определяется образами трех точек. Действительно, по координатам этих точек и их образов составляются три уравнения на коэффициенты a, b, c, d соответствующей дробно-линейной функции. Тем самым коэффициенты будут заданы с точностью до множителя, а сама функция — однозначно. Точно так же, зная координаты двух точек A, B и их образов A', B' при *параллельной* проекции, мы могли бы найти соответствующую линейную функцию, а с ее помощью — и образ C' любой другой точки C . Однако точку C' можно построить гораздо проще: при параллельной проекции отношение, в котором точка делит отрезок, остается неизменным, или инвариантным, поэтому $A'C' : C'B' = AC : CB$. (Здесь и ниже мы считаем отрезки направленными; равенство $AC : CB = k$ означает, что $\overline{AC} = k\overline{CB}$.) Центральная проекция не сохраняет отношение $AC : CB$, зато она сохраняет отношение двух таких отношений. Эта величина называется *двойным отношением* четырех точек, обозначается $(ABCD)$ и равна по определению

$$(ABCD) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}.$$

Чтобы доказать инвариантность двойного отношения, рассмотрим прямые a, b, c, d , проходящие через общую точку P (рис. 12) и произвольную прямую l , пересекающую их в точках A, B, C ,

² Линейная функция — это частный случай дробно-линейной.

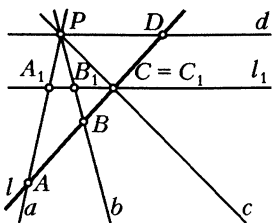


Рис.12. К инвариантности двойного отношения

D . Проверим, что $(ABCD) = A_1C_1/B_1C_1$, где A_1, B_1, C_1 — точки пересечения прямой l_1 , параллельной d , с a, b и c . Очевидно, отношение A_1C_1/B_1C_1 одинаково для всех таких прямых, поэтому можно считать, что l_1 проходит через C , т.е. $C_1 = C$. Из подобия треугольников, которые читатель легко найдет сам на рисунке 12, имеем

$$\frac{AC}{AD} = \frac{A_1C}{PD}, \quad \frac{CB}{DB} = \frac{B_1C}{PD}.$$

Поэтому

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{AC}{AD} : \frac{CB}{DB} = \frac{A_1C}{PD} : \frac{B_1C}{PD} = \frac{A_1C}{B_1C} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1}.$$

Итак, для данных прямых a, b, c, d двойное отношение $(ABCD)$ не зависит от прямой l , а значит, оно сохраняется при центральной проекции.

Пусть теперь нам известны образы A', B' и C' точек A, B, C при некотором преобразовании. Тогда образ D' любой другой точки D находится из соотношения $(A'B'C'D') = (ABCD)$ или $A'D'/D'B' = (ABCD) \cdot (A'C'/C'B')$. Если записать эти равенства в координатах, мы получим еще одно подтверждение того, что проективное преобразование выражается дробно-линейной функцией, и одновременно способ нахождения этой функции. В качестве упражнения читателю предлагается прямым вычислением проверить инвариантность двойного отношения относительно линейных функций и функции $1/x$, а значит, и любой дробно-линейной функции (ибо любая дробно-линейная функция — композиция таких функций!).

Вернемся еще раз к линзе, соответствующему проективному преобразованию p ее главной оптической оси и его аналитическому выражению — формуле линзы. Оказывается, и эту формулу можно вывести с помощью двойного отношения. Представим, что к главной оси добавлена воображаемая бесконечно удаленная точка U , координату которой будем считать равной ∞ . Условимся, что через эту точку проходят все прямые, параллельные оси. Тогда ее нужно рассматривать как изображение фокуса F , а ее собственным изображением будет второй фокус F' . Итак, мы знаем, куда переходят при преобразовании p три точки: центр линзы — $p(O) = O$, фокус — $p(F) = U$ и бесконечно удаленная точка — $p(U) = F'$. Координаты точек O, F, F' и U

равны, соответственно, 0, f , f' и ∞ . Если r и r' – координаты точки A и ее образа A' , то

$$(OFUA) = \frac{\infty - 0}{f - \infty} : \frac{r - 0}{f - r} = -\frac{f - r}{r} = 1 - \frac{f}{r},$$

$$(OUF'A') = \frac{f' - 0}{\infty - f'} : \frac{r' - 0}{\infty - r'} = \frac{f'}{r'}.$$

Приравнивая эти выражения (двойное отношение сохраняется!), получаем формулу линзы. Обосновать законность этих трюков легко: надо просто перейти в равенстве $(OB'CA) = (OB'C'A')$ к пределу при $B \rightarrow F$, $OC \rightarrow \infty$. Однако в следующем разделе мы увидим, что добавление бесконечно удаленной точки имеет глубокий смысл, а отнюдь не является чисто формальным приемом, граничащим с мистификацией.

Проективная плоскость

Настало время обратить более пристальное внимание на точки, которые до сих пор мы лишь вскользь упоминали. Эти точки *фокальных прямых* m и n , параллельных «линии линзы» l и проходящих через фокусы F и F' (рис.13). Эти точки у нас обижены: уже говорилось, что точки первой прямой никак не изображаются, ведь исходящие из них лучи становятся параллельными. Аналогично, точки второй прямой как бы ничего не изображают: в них фокусируются падающие на линзу пучки параллельных лучей. Впрочем, с такой «дискриминацией» можно не согласиться. В

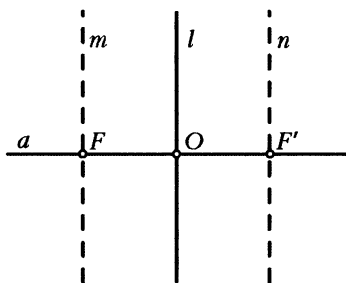


Рис.13. Фокальные прямые тип

конце концов, увидеть точечный источник света – это все равно, что увидеть испускаемые им лучи, а пучок параллельных лучей ничем не хуже центрального. Поэтому естественно рассматривать любой пучок параллельных как пучок лучей, исходящих из некой *бесконечно удаленной точки* – его «центра» (математическое воплощение «далекой звезды»), а точку прямой n , в которой он фокусируется, – как изображение этого бесконечно удаленного центра. Никакой мистики здесь нет: во всяком случае, бесконечно удаленные точки реальны ровно настолько,

насколько реальны параллельные прямые. В то же время, они позволяют придать законченный вид всем нашим построениям.

Дадим более строгие определения. К каждой прямой d плоскости мы добавляем ровно одну новую точку U_d , причем ко всем параллельным прямым добавляется одна и та же точка. А все новые точки объединяются в одну «бесконечно удаленную» прямую u . Эта процедура называется *пополнением плоскости*.

На пополненной плоскости сохраняется «аксиома прямой» — *через любые две точки можно провести одну и только одну прямую*. Например, если одна из двух точек — «обычная» точка M , а другая — бесконечно удаленная точка U_d , то содержащая их прямая проходит через M и параллельна d ; ее единственность следует из аксиомы параллельных. Прямые удовлетворяют симметричному свойству: *любые две прямые имеют ровно одну общую точку* (обычную или бесконечную). Другими словами, на пополненной плоскости две прямые всегда пересекаются. Любое множество точек, в котором выделена некоторая система подмножеств — «прямых», удовлетворяющая этим двум свойствам³, называется (*абстрактной*) *проективной плоскостью*. Это очень общее определение допускает множество разных интерпретаций, среди них, как это ни парадоксально, и «плоскости» из конечного числа точек (см., например, решение задачи М1113 в «Кванте» № 11–12 за 1988 г.). Пополнение обычной плоскости бесконечно удаленными точками дает *действительную проективную плоскость*; только о такой плоскости и идет у нас речь.

Но вернемся к оптике. Теперь мы можем сказать, что наша идеальная линза создает изображение $p(A)$ для любой точки A пополненной плоскости и, наоборот, любая точка этой плоскости является изображением некоторого точечного источника. В частности, фокус F изображается бесконечно удаленной точкой $U_a = p(F)$ главной оптической оси, а сама точка U_a — вторым фокусом $F' = p(U_a)$. Точно так же, любая прямая пополненной плоскости изображается прямой и сама служит изображением какой-то прямой. В частности, бесконечно удаленная прямая u изображает фокальную прямую m , а сама изображается второй фокальной прямой n . Когда мы смотрим на мир сквозь линзу, разница между бесконечно удаленными и «нормальными» эле-

³ Чтобы исключить совсем неинтересные примеры, к ним обычно добавляют еще одно: существуют 4 точки, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой.

ментами стирается: все точки и все прямые проективной плоскости равноправны.

На первых порах примириться с этим трудновато по простой причине – проективную плоскость мы воспринимаем пока только как продукт пополнения обычной плоскости. Но если немного напрячь воображение и взглянуть на нее иначе, можно увидеть нечто поистине неожиданное. Пусть α – пополненная плоскость, P – точка вне ее (рис. 14).

Каждой точке A плоскости α соответствует ровно одна проходящая через центр проекции P прямая PA (бесконечно удаленной точке U_d соответствует прямая, параллельная d). Заменяем точки на соответствующие прямые. Иначе говоря, рассмотрим «плоскость» Π , «точками» которой будут служить всевозможные прямые в пространстве, проходящие через P , а «прямыми» – плоскости, проходящие через P , точнее, каждая «прямая» – это совокупность всех обычных прямых (носящих теперь название «точек»), лежащих в одной, обычной плоскости; кавычки помогут нам избежать путаницы в терминах. Совершенно ясно, что послужившее нам отправным пунктом соответствие между «точками» Π и точками пополненной плоскости α сопоставляет каждой «прямой» на Π прямую на α , и наоборот. Поэтому Π – это просто другая модель действительной проективной плоскости (тем не менее небесполезно проверить непосредственно выполнение трех приведенных выше аксиом проективной плоскости). И в этой модели никаких выделенных точек и прямых нет. Но мы можем вернуться к первой интерпретации, пересекая все прямые нашего пучка (т.е. «точки» Π) любой плоскостью β , не проходящей через P , при этом можно заранее договориться о том, какая «прямая» станет бесконечно удаленной.

Достижение «всеобщего равноправия» – отнюдь не главное преимущество построенной модели проективной плоскости. Мы можем теперь естественным образом ввести на проективной плоскости координаты (как координаты любого направляющего вектора заданной прямой-«точки»), записывать в этих координатах проективные преобразования и т.д. Но это тема для другой статьи. Мы же сейчас еще немного переделаем эту модель, чтобы лучше представлять, как устроена проективная плоскость.

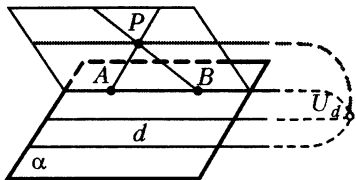


Рис. 14. Между точками пополненной плоскости и пучком прямых с центром P устанавливается взаимно однозначное соответствие

Как устроена проективная плоскость

Рассмотрим сферу с центром в точке P . Любая прямая нашего пучка («точка») пересекает ее в двух диаметрально противоположных точках. Заменим прямые на эти пары точек. Тогда проективная плоскость примет обличье сферы (рис. 15), в которой концы каждого диаметра считаются за одну точку — отождествлены, а прямые проективной плоскости представятся окружностями с отождествленными диаметрально противоположными точками. Каждую пару таких точек можно

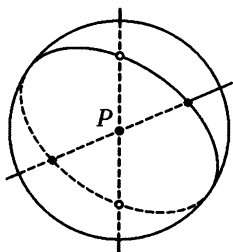


Рис. 15. Проективную плоскость можно представить как сферу с отождествленными точками

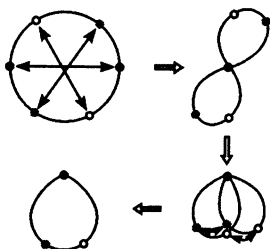


Рис. 16. Проективная прямая устроена как окружность

«склеить», заменив их на одну обычную точку — это проделано на рисунке 16 (при этом приходится выполнять непрерывные деформации). Что же получилось в итоге? Окружность! Итак, добавляя к обычной прямой бесконечно удаленную точку, т.е. превращая ее в проективную прямую, мы как бы замыкаем ее в окружность.

Теперь попытаемся осуществить такую же склейку для всей плоскости. Вырежем из нашей сферы кольцевой поясск вдоль экватора — остаются две сферические шапочки, которые после

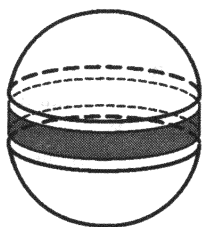


Рис. 17. Готовимся к склейке проективной плоскости

склейки превращаются в одну (рис. 17). Поясок разрежем по двум противоположным меридианам (рис. 18, а; линии разреза обозначены одинаково, потому что они должны быть отождествлены) и подклеим одну половинку к другой. Склеим, наконец, образовавшуюся полосу по линии разреза. Вот и обещанный сюрприз: перед склейкой полосу придется перевернуть на 180° , а значит, в результате получится лента Мёбиуса (рис. 18, б). Ее граница — это одна замкнутая кривая, которую

осталось подклеить к окружности, ограничивающей сферическую шапочку. Таким образом, проективная плоскость – это сфера с дыркой, заклеенной лентой Мёбиуса.

Теперь есть смысл еще раз посмотреть, как изменяется изображение предмета, движущегося по главной оптической оси из бесконечности к фокусу F и дальше (рис.19). При приближении к фокусу изображение уходит на бесконечность и сразу после

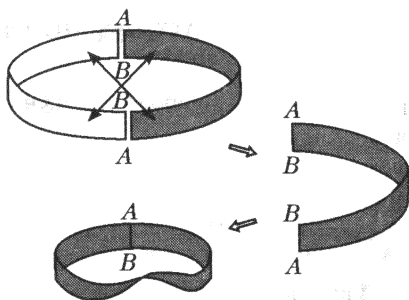


Рис.18. Так появляется лента Мёбиуса

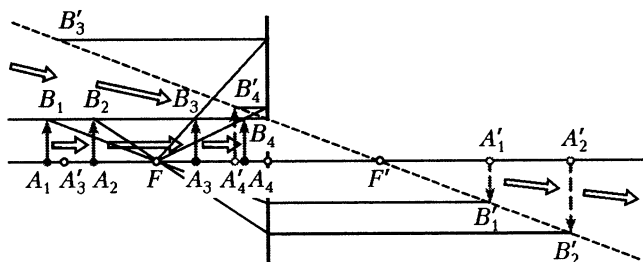


Рис.19. Превращение прямого изображения в обратное

фокуса возвращается, но уже с другой стороны (ничего удивительного – прямая-то замкнута). При этом из прямого оно делается обратным, появляется по другую сторону оси (а это, так сказать, эффект ленты Мёбиуса).

ЛОВУШКА ДЛЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

В.Дубровский, В.Сендеров

Много лет назад на приемном экзамене на физфак МГУ предлагалась следующая задача:

Упражнение 1. Медианы прямоугольного треугольника пересекаются на его вписанной окружности. Найдите углы этого треугольника.

Есть и другие задачи о треугольниках, в которых центр тяжести (точка пересечения медиан) лежит на вписанной окружности. Например, треугольник, одна из медиан которого делится вписанной окружностью на три равные части, фигурировал в задаче М1224 «Задачника «Кванта».

А как расположен относительно вписанной окружности ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника? Если треугольник правильный, то его ортоцентр находится в центре вписанной окружности. Ортоцентр неостроугольного треугольника, очевидно, лежит вне ее. Отсюда понятно, что, деформируя любой такой треугольник в правильный, мы обязательно пройдем через положение, в котором ортоцентр лежит точно на вписанной окружности.

А можно ли «посадить» на вписанную окружность сразу обе эти замечательные точки? Этот вопрос оказывается довольно сложным. Мы покажем, что ответ на него утвердительный:

треугольник, у которого и центр тяжести, и ортоцентр лежат на вписанной окружности, существует.

Доказательство этого факта требует привлечения богатого арсенала методов и фактов геометрии треугольника, которые пригодятся читателям и при решении других задач.

Нам придется иметь дело с многочисленными соотношениями в треугольнике. Напомним стан-

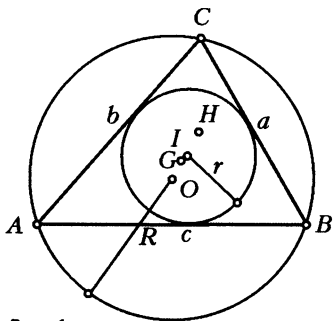


Рис. 1

дартные обозначения его элементов (рис.1): стороны треугольника ABC обозначаются a ($= BC$), b , c ; центры вписанной и описанной окружностей – I и O , а их радиусы, соответственно, – r и R ; ортоцентр (точка пересечения высот) – H , центроид (точка пересечения медиан) – G .

В искомом треугольнике должно выполняться равенство $IG = IH = r$. Прежде чем заняться анализом этих уравнений, сделаем несколько полезных для дальнейшего «заготовок».

Замечательная формула для «замечательных расстояний»

Начнем с формулы, которая позволит нам выражать расстояния между различными «замечательными точками» треугольника ABC через другие его элементы.

Упражнение 2. Докажите, что для любой точки P и произвольных чисел x, y, z

$$\begin{aligned} |x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB} + z\overrightarrow{PC}|^2 = \\ = s \cdot (xPA^2 + yPB^2 + zPC^2) - (xyc^2 + yza^2 + zxb^2), \quad (1) \end{aligned}$$

где $s = x + y + z$ (рис.2).

Как известно из физики, при $s = x + y + z = 1$ точка D , определяемая равенством $\overrightarrow{PD} = x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB} + z\overrightarrow{PC}$, есть центр масс системы трех масс x, y, z , помещенных в точки A, B, C , и формула (1) дает квадрат расстояния от точки P до D . В частности, при $x = y = z = 1/3$ точка D есть центроид G треугольника:

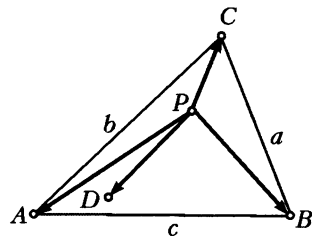


Рис. 2

$$\overrightarrow{PG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}), \quad (2)$$

а само равенство (1) принимает вид *формулы Лейбница*

$$PG^2 = (PA^2 + PB^2 + PC^2)/3 - (a^2 + b^2 + c^2)/9$$

для квадрата расстояния от произвольной точки P до G .

Если $P = O$ – центр описанной окружности треугольника ABC , то (1) дает

$$OM^2 = s^2 R^2 - (xyc^2 + yza^2 + zxb^2), \quad (3)$$

где

$$\overline{OM} = x\overline{OA} + y\overline{OB} + z\overline{OC}.$$

Приведем еще два интересных частных случая формулы (1).

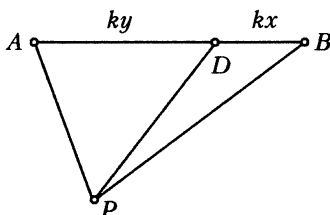


Рис. 3

Упражнение 3. Докажите, что а) если точка D лежит на стороне AB треугольника PAB (рис.3) и делит ее в отношении $AD : DB = y : x$, где $x + y = 1$, то

$$PD^2 = xPA^2 + yPB^2 - xyAB^2$$

(формула Стюарта);

б) расстояние между ортоцентром и центром описанной окружности треугольника можно найти по формуле

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Многочлен треугольника

Один из способов доказать существование треугольника, удовлетворяющего тем или иным условиям, — составить, исходя из этих условий, уравнение $F(x) = 0$, корнями которого являются длины a, b, c его сторон, и доказать, что оно имеет три положительных решения, причем эти решения должны удовлетворять «неравенствам треугольника» для сторон ($a < b + c$ и т.д.) Часто удобнее иметь дело не с самими сторонами, а с отрезками, на которые они разбиваются точками касания вписанной окружности. Любые два таких отрезка, выходящих из одной вершины, равны по теореме о касательных; обозначим их a_1 (для отрезков, выходящих из A), b_1 и c_1 (рис.4).

Упражнение 4. Покажите, что а) $a_1 = (b + c - a)/2 = p - a$, $b_1 = p - b$ и $c_1 = p - c$; б) треугольник с заданными величинами a_1 , b_1 и c_1 существует (и однозначно определен) при любых положительных значениях этих величин.

Таким образом, перейдя от сторон к отрезкам a_1, b_1, c_1 , мы избавляемся от необходимости заботиться о неравенстве треугольника.

Итак, рассмотрим кубический многочлен $F_1(x)$ с корнями a_1, b_1, c_1 :

$$\begin{aligned} F_1(x) &= (x - a_1)(x - b_1)(x - c_1) = \\ &= x^3 - (a_1 + b_1 + c_1)x^2 + (a_1b_1 + b_1c_1 + c_1a_1)x - a_1b_1c_1. \end{aligned}$$

Выразим его коэффициенты через радиусы R , r и периметр $2p$ треугольника. Очевидно, $a_1 + b_1 + c_1 = 3p - (a + b + c) = p$. Пользуясь формулой Герона и формулой $S = rp$ для площади треугольника, вычислим свободный член:

$$a_1 b_1 c_1 = (p - a)(p - b)(p - c) = S^2 / p = r^2 p.$$

Наконец, коэффициент при x можно найти, вычислив $F_1(p)$:

$$\begin{aligned} F_1(p) &= (p - a_1)(p - b_1)(p - c_1) = abc = \\ &= p^3 - p \cdot p^2 + (a_1 b_1 + b_1 c_1 + c_1 a_1)p - r^2 p. \end{aligned}$$

Из формул $S = pr$ и $S = \frac{abc}{4R}$ получаем

$$abc = 4Rrp, \quad (4)$$

откуда

$$a_1 b_1 + b_1 c_1 + c_1 a_1 = r^2 + 4Rr,$$

и «уравнение треугольника» принимает вид

$$F_1(x) = x^3 - px^2 + (r^2 + 4Rr)x - r^2 p = 0. \quad (5)$$

Нам нужно найти коэффициенты этого уравнения в нашей задаче и доказать его разрешимость.

Упражнение 5. Проведите аналогичное рассуждение для многочлена

$$F(x) = (x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (b + bc + ca)x - abc.$$

Докажите, что $F(x) = x^3 - 2px^2 + (r^2 + 4Rr + p^2)x - 4Rrp$.

В алгебре коэффициенты многочлена $F(x)$ — выражения $a + b + c$, $ab + bc + ca$ и abc — называют *элементарными симметрическими* (т.е. не меняющимися при перестановке переменных) многочленами от трех переменных (a , b и c). Через них можно выразить любой симметрический многочлен от a , b , c . Поэтому любую величину в треугольнике, имеющую геометрический смысл (т.е. одинаковую для равных треугольников, а значит, не меняющуюся при перестановке сторон) и выражаемую многочленом от длин сторон, можно записать через радиусы вписанной и описанной окружностей и периметр. Ниже мы встретимся с несколькими такими выражениями.

Упражнение 6. Для треугольника ABC докажите, что

$$a) \quad a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 8Rr - 2r^2;$$

$$6) \ a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = p^2 - 8Rr - 2r^2 = a^2 + b^2 + c^2 - p^2;$$

$$\text{B) } ab^2 + a^2b + bc^2 + b^2c + ca^2 + c^2a = 2p(r^2 - 2Rr + p^2).$$

Условие на центроид

Обратимся непосредственно к треугольнику, который рассматривается в нашей задаче. Выразим с помощью формулы Лейбница расстояние IG от центра I вписанной окруж-

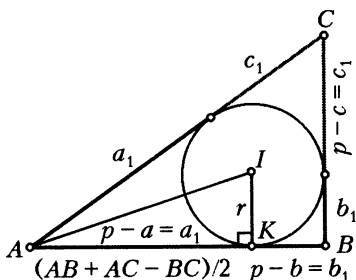


Рис. 4

ности до центра G . Расстояние IA найдем из прямоугольного треугольника AIK (см. рис.4), где K – точка касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной AB . Поскольку $AK = a_1 = p - a$ (см. упражнение 4), то $IA^2 = a_1^2 + r^2$. Аналогично выражаются величины IB^2 и IC^2 . Поэтому (см. упражнение 6)

$$IG^2 = (a_1^2 + r^2 + b_1^2 + r^2 + c_1^2 + r^2) / 3 - (a^2 + b^2 + c^2) / 9 = (p^2 - 16Rr + 5r^2) / 9.$$

Значит, *центроид треугольника лежит на вписанной окружности* ($IG = r$) тогда и только тогда, когда

$$p^2 = 16Rr + 4r^2. \quad (6)$$

Заметим, что при этом условии «уравнение треугольника» (5) упрощается:

$$x^3 - px^2 + (p^2/4)x - r^2p = 0,$$

а после замены $x = pu/2$ становится совсем «хорошим»:

$$u(u-1)^2 = 8(r/p)^2. \quad (5')$$

Условие на ортоцентр

Мы хотим найти треугольник, в котором и ортоцентр лежит на вписанной окружности, т.е. $IH = IG = r$. В задачах, где идет речь одновременно о центроиде и ортоцентре, почти неизбежно на арене появляется еще одна замечательная точка треугольника – центр описанной окружности O . Наша задача – не исключение.

Упражнения

7. Докажите, что в любом треугольнике

а) $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$;

б) $\overrightarrow{OI} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{a + b + c}$, иначе говоря, центр I вписанной окружности есть центр масс системы масс a, b, c , помещенных в вершинах A, B, C соответственно;

в) $\overrightarrow{IH} = \left(1 - \frac{a}{2p}\right)\overrightarrow{OA} + \left(1 - \frac{b}{2p}\right)\overrightarrow{OB} + \left(1 - \frac{c}{2p}\right)\overrightarrow{OC}$.

8. Покажите, что в любом треугольнике

$$IH^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2. \quad (7)$$

Подставим в равенство (7) $IH = r$, выразим из него p^2 и приравняем это выражение к правой части (6):

$$p^2 = 4R^2 + 4Rr + 2r^2 = 16Rr + 4r^2.$$

Отсюда получаем важное соотношение между радиусами вписанной и описанной окружностей искомого треугольника:

$$r^2 + 6Rr - 2R^2 = 0. \quad (8)$$

Малость, которой хватает

Возьмем для определенности $R = 1$, тогда из последнего уравнения получим $r = \sqrt{11} - 3$ (второй корень уравнения (8) отрицательный), а из предпоследнего — $p^2 = 8(4 - \sqrt{11})$. Подставим величину

$$8\left(\frac{r}{p}\right)^2 = \frac{(\sqrt{11} - 3)^2}{4 - \sqrt{11}} = \frac{2(7 - 2\sqrt{11})}{5}$$

в «уравнение треугольника» (5'):

$$u(u-1)^2 = \frac{2(7 - 2\sqrt{11})}{5}.$$

Нам остается доказать, что это уравнение имеет три положительных корня. На рисунке 5 показан график левой части этого уравнения. Ее значение в точке $1/3$ (являющееся ее наибольшим значением на от-

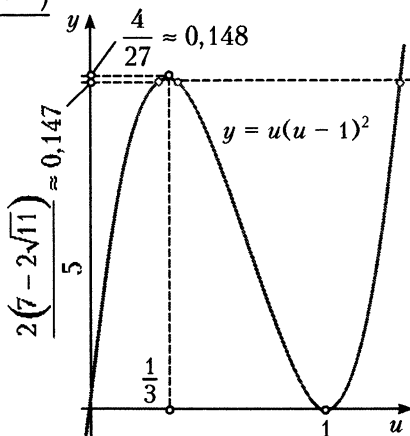


Рис. 5

резке $[0; 1]$, что сейчас для нас несущественно) равно $4/27$ и больше $2(7 - 2\sqrt{11})/5$ (проверьте!), причем разница между этими величинами едва превышает одну тысячную.

Отсюда, очевидно, следует, что наше «уравнение треугольника» действительно имеет три положительных решения, а значит, искомый треугольник существует. Более того, его стороны, с точностью до пропорциональности, определены однозначно, а значит, все треугольники, удовлетворяющие нашему условию, подобны. Стоит сказать, что циркулем и линейкой этот треугольник не строится.

Геометрия вместо алгебры

Идея приведенного выше вычислительного решения предельно проста: «записать условия в виде уравнений и посчитать», хотя сами вычисления достаточно хитроумны. Но, как это часто бывает, наша задача имеет и более изысканное «геометрическое» решение, использующее несколько классических теорем о треугольнике. С этих теорем мы и начнем изложение второго решения.

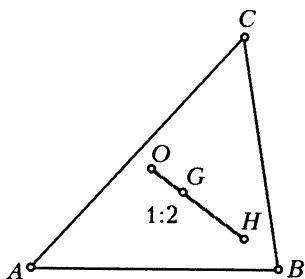


Рис. 6

Упражнения

9 (прямая Эйлера). Докажите, что в любом треугольнике центроид G лежит на отрезке OH между центром описанной окружности и ортоцентром и делит его в отношении $OG : GH = 1 : 2$ (рис.6). Прямая OH (при $O \neq H$) называется *прямой Эйлера* данного треугольника.

10 (формула Эйлера). Докажите, что расстояние $d = OI$ между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника вычисляется по формуле $d^2 = R^2 - 2Rr$.

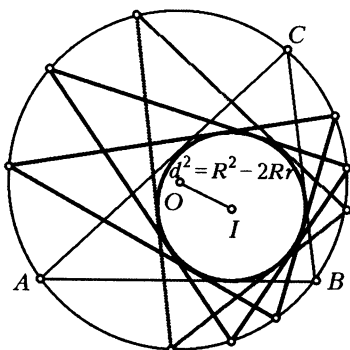


Рис. 7

Таким образом, две окружности могут служить вписанной и описанной окружностями некоторого треугольника лишь в том случае, когда их радиусы связаны с расстоянием между их центрами формулой Эйлера. (В частности, отсюда видно, что в любом треугольнике $R \geq 2r$.)

Верно и обратное. Более того, если расстояние между центрами двух окружностей связано с их радиусами формулой $d^2 = R^2 - 2Rr$, то исходя из любой точки A на окружности радиуса R можно построить треугольник ABC , вписанный в эту окружность и описанный около второй окружности (рис.7).

Упражнение 11. Докажите последнее утверждение.

Сформулируем теперь одну из самых красивых теорем планиметрии — теорему Фейербаха. Она касается окружности, проходящей через середины сторон треугольника, а также, что является отдельной теоремой, через основания его высот и середины отрезков от ортоцентра до вершин (рис.8; эту окруж-

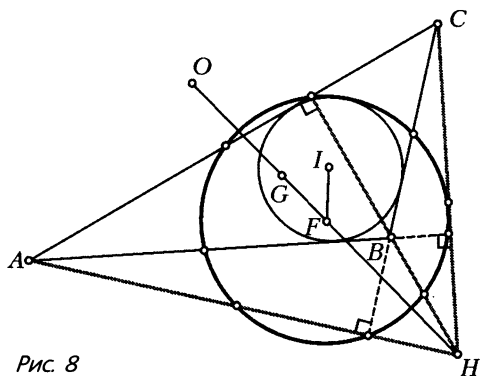


Рис. 8

ность называют *окружностью девяти точек*). Ее можно представить как образ описанной окружности при гомотетии относительно центроида G с коэффициентом $-1/2$ или относительно ортоцентра с коэффициентом $1/2$. В любом случае получим, что центр F окружности девяти точек лежит на прямой Эйлера, точнее, в середине отрезка OH , а ее радиус равен $R/2$. Теорема Фейербаха утверждает, что *окружность 9 точек касается вписанной окружности треугольника и трех его внеписанных окружностей*. В частности, это означает, что $IF = R/2 - r$; именно это равенство нам и понадобится.

Упражнение 12. Докажите, что

$$\overline{IF} = \frac{1}{2p} ((p-a)\overline{OA} + (p-b)\overline{OB} + (p-c)\overline{OC}),$$

и выведите отсюда равенство $IF^2 = (R/2 - r)^2$.

Последнее свойство, которое мы хотим напомнить, хорошо известно:

Упражнение 13. Если на плоскости даны окружность и точка P , то для любой прямой, проходящей через P и пересекающей окружность, произведение $PA \cdot PB$, где A и B – точки пересечения прямой с окружностью, будет одним и тем же; оно равно $|d^2 - R^2|$, где d – расстояние от точки P до центра окружности, а R – радиус окружности.

В учебниках эту теорему обычно формулируют в виде двух утверждений – для точки внутри и вне окружности; величину $d^2 - R^2$ называют *степенью* точки P относительно данной окружности.

Теперь, наконец, мы можем вплотную заняться нашим треугольником.

Проведем в нем прямую Эйлера OH . Допустим, что точка H уже по-

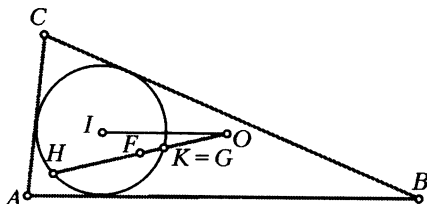


Рис. 9

пала на вписанную окружность, и выведем условие, при котором и точка G окажется на ней (рис.9).

Пусть K – вторая точка пересечения прямой OH с вписанной окружностью. Обозначим $OH = l$, $OK = kl$, где k – числовой множитель. Тогда степень точки O относительно вписанной окружности равна $OK \cdot OH = kl^2$, а с другой стороны, в силу упражнения 13 и формулы Эйлера, она равна $OI^2 - r^2 = R^2 - 2Rr - r^2$. Аналогично, степень точки F относительно вписанной окружности равна

$$\begin{aligned} FH \cdot FK &= (l/2) \cdot |1/2 - k|l = |1 - 2k| \cdot (l/2)^2 = \\ &= r^2 - IF^2 = r^2 - (R/2 - r)^2 = -R^2/4 + Rr. \end{aligned}$$

В искомом треугольнике точка $K = G$ – центр тяжести и $k = 1/3$. Это дает равенство $l^2/3 = R^2 - 2Rr - r^2 = 4(-R^2/4 + Rr)$, из которого сразу получается уже знакомое нам уравнение (8). Обратно, если радиусы R и r удовлетворяют этому уравнению и известно, что ортоцентр лежит на вписанной окружности, то для множителя k точно таким же способом получим уравнение $k = |2k - 1|$, имеющее два решения: $k = 1/3$ и $k = 1$. В первом случае $OK = (1/3)OH$, т.е. $K = G$ – центр тяжести G лежит на вписанной окружности.

Упражнение 14. Покажите, что случай $k = 1$ невозможен.

Итак, нарисуем окружности Ω и ω радиусов R и

$r = (\sqrt{11} - 3)R$ с центрами O и I на расстоянии $d = \sqrt{R^2 - 2Rr} = R\sqrt{7 - 2\sqrt{11}}$. Как уже было сказано, для любой точки A на окружности Ω можно построить треугольник ABC , вписанный в Ω и описанный около ω . Пусть A пробегает окружность Ω , тогда ортоцентр H треугольника ABC , очевидно, опишет некоторую замкнутую непрерывную линию. Нам достаточно показать, что он побывает и внутри, и снаружи вписанной окружности ω . Тогда его траектория непременно должна пересечь ω , т.е. при некотором положении точки A ортоцентр H треугольника ABC попадает на ω ; выше мы доказали, что в силу заданного соотношения между R и r соответствующий треугольник и будет искомым.

Проведем в окружности Ω диаметр A_1A_2 через I (рис.10) и рассмотрим равнобедренные треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, отвечающие его концам. Треугольник $A_1B_1C_1$ (см. рис.10,а)

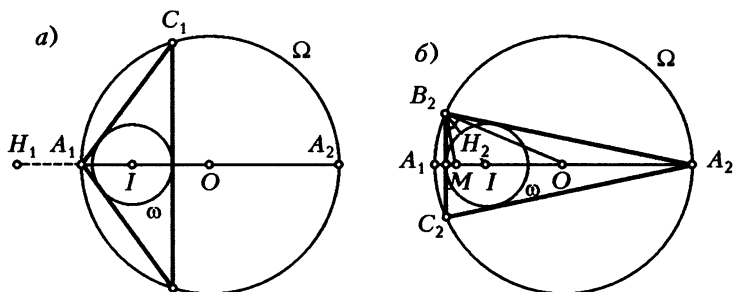


Рис 10

тупоугольный, так как O – центр его описанной окружности – лежит вне этого треугольника. (Действительно, достаточно убедиться, что $IO = d > r$, или $d^2 = R^2 - 2Rr > r^2$. После подстановки численных значений это неравенство принимает вид $7 - 2\sqrt{11} > (\sqrt{11} - 3)^2 \Leftrightarrow 4\sqrt{11} > 13 \Leftrightarrow 176 > 169$.) Следовательно, ортоцентр H_1 этого треугольника лежит вне его – на продолжении радиуса OA_1 , т.е. не только вне ω , но и вне Ω . Второй треугольник, $A_2B_2C_2$, остроугольный (он содержит O), и его ортоцентр H_2 лежит на его высоте A_2M . Установить, что он находится внутри вписанной окружности, точнее на ее радиусе IM , можно, сославшись на то, что в любом треугольнике биссектриса любого угла делит пополам угол между высотой и радиусом описанной окружности, проведенными из той же вершины, что и биссектриса (на рисунке 10,б, например,

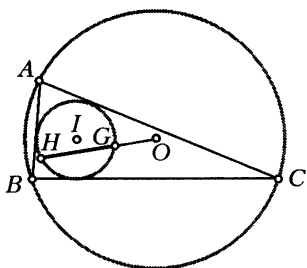


Рис. 11

$\angle H_2B_2I = \angle IB_2O$); в нашем случае отсюда следует, что точки O и H_2 лежат по разные стороны от I .

Упражнение 15. Докажите выделенное курсивом утверждение о биссектрисе.

Этим завершается второе решение нашей задачи. Искомый треугольник изображен на рисунке 11.

Задачи «на закрепление»...

Упражнения

16. Покажите, что каждое из условий а) $2R + r = p$ и б) $8R^2 = a^2 + b^2 + c^2$ необходимо и достаточно для того, чтобы треугольник был прямоугольным. В случае остроугольного треугольника знак « \Rightarrow » в обоих соотношениях нужно заменить на « $<$ », а в случае тупоугольного – на « $>$ ».

17 (М1487). Пусть H – точка пересечения высот, O и I – центры описанной и вписанной окружностей неравнобокого треугольника. Докажите, что из трех отрезков OH , IH , OI наибольший – OH .

...и для исследования

Интересно выяснить, хотя для решения задачи это само по себе и не нужно, какую именно траекторию описывает ортоцентр треугольника ABC , «зажатого» между данными окружностями ω и Ω . Ответ оказывается неожиданно простым –

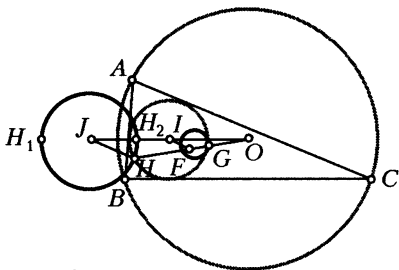


Рис. 12

окружность! Для доказательства возьмем на луче OI точку J так, что $OJ = 2OI$ (рис.12). Тогда IF – средняя линия треугольника OJH , следовательно, $JH = 2IF = R - 2r$. Диаметром этой окружности, очевидно, будет отрезок H_1H_2 , соединяющий выше равнобедренных треугольников.

Из соображений непрерывности ясно, что когда A пробегает описанную окружность, H пройдет всю указанную окружность, причем за один оборот точки A точка H совершит три полных оборота.

Заметим, что по теореме о прямой Эйлера (упражнение 9) центроид G нашего треугольника также описывает окружность; ее радиус равен $(R - 2r)/3$, а центр делит отрезок IO в отношении 1:2. В связи с этим возникает следующая задача.

Рассмотрим две окружности ω и Ω , первая из которых лежит внутри второй. Допустим, что существует *четырёхугольник*, вписанный в Ω и описанный около ω . Можно доказать, что тогда, как и в случае треугольника, такой четырёхугольник можно нарисовать, взяв за одну из его вершин любую точку окружности Ω ; это утверждение называется *теоремой Понселе* (для четырёхугольника). **Верно ли, что множество центроидов всех этих четырёхугольников тоже окружность?** (Центроид четырёхугольника — это центр масс четырех материальных точек, сосредоточенных в его вершинах; он находится на пересечении средних линий четырёхугольника.) Эксперимент дает утвердительный ответ на этот вопрос (рис. 13), но к моменту написания этой статьи доказательством мы не располагали.

Теорема Понселе справедлива и для многоугольников с произвольным числом сторон n . Будет ли центроид «многоугольника Понселе» описывать окружность при любом n ?

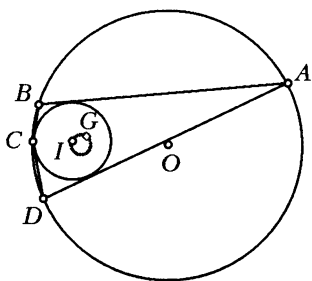


Рис. 13

РЕШЕТКИ И ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГУГОЛЬНИКИ

А.Егоров

В этой статье разбираются три тесно связанные между собой вопроса.

1) Можно ли расположить правильный n -угольник на листе линованной бумаги – в прямую или косую клетку – так, чтобы его вершины попали в точки пересечения линий?

2) При каких углах α , соизмеримых с полным – т.е. содержащих целое или рациональное число градусов, значения синуса, косинуса или тангенса α рациональны?

3) В какие положения может попасть центр правильного n -угольника, который разрешается перекачивать по плоскости (последний вопрос составлял содержание задачи М252 из «Задачника «Кванта»)?

§1. Точечные решетки на плоскости

Рассмотрим на плоскости сетку, образованную двумя семействами параллельных прямых, разрезающих плоскость на одинаковые параллелограммы (рис.1).

Множество всех вершин этих параллелограммов назовем *точеч-*

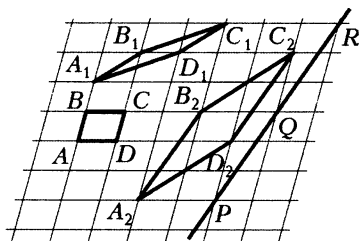


Рис. 1

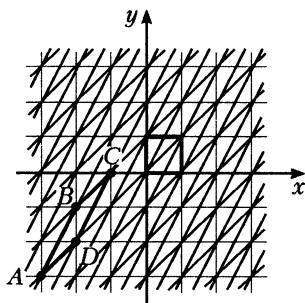


Рис. 2

ной решеткой, сами вершины – узлами решетки, а любой из параллелограммов разбиения – *основным параллелограммом разбиения*, или параллелограммом, *порождающим* решетку.

Заметим, что одна и та же решетка может получиться из разных сеток прямых: на рисунке 2 изображена так называемая

Опубликовано в «Кванте» №12 за 1974 г.

целочисленная решетка, т.е. множество точек, имеющих в декартовой системе координат целочисленные координаты. Целочисленную решетку вместе с сеткой прямых, параллельных осям координат, можно представлять себе как бесконечный лист клетчатой бумаги (тогда основным параллелограммом будет квадрат со стороной 1). Ту же самую целочисленную решетку можно получить, проводя наклонные прямые (тогда основным параллелограммом служит параллелограмм $ABCD$). Таким образом, понятие основного параллелограмма решетки связано не только с самой решеткой, но и с сеткой прямых, эту решетку порождающих.

Из простейших свойств решеток пока отметим следующие.

1°. Всякий параллельный перенос, переводящий некоторый узел решетки в другой узел, переводит решетку в себя.

2° (*Лемма о четвертой вершине параллелограмма*). Если три вершины параллелограмма являются узлами некоторой решетки, то и четвертая вершина – тоже узел этой решетки.

3°. Если через произвольные два узла Q и R решетки провести прямую, то эта прямая пройдет через бесконечное количество узлов. При этом все расстояния между соседними узлами, лежащими на прямой, будут равны (см. рис.1).

4°. Если параллелограмм с вершинами в узлах некоторой решетки не содержит других узлов на сторонах и внутри себя, то он эту решетку порождает.

Упражнения

1. Докажите свойства 1° – 4°.

2. Пусть a и b – любые действительные числа. Докажите, что множество всех точек с координатами (ka, lb) , где k и l – целые числа, является решеткой.

Важное свойство решеток отражает следующая задачка-шутка:

В некотором узле A решетки находится охотник, а в остальных узлах сидят одинаковые и одинаково расположенные зайцы (рис.3,а). Охотник наугад стреляет (траектория пули – луч, выходящий из точки A). Вернется ли он домой с добычей? (Зайцы считаются «толстыми».)

Понятно, что если траектория пули проходит через узел (отличный от точки A), то заяц, сидящий в этом узле, будет убит. Поэтому интересен только тот случай, когда узел A – единственный на траектории пули; оказывается, что и в этом случае какой-нибудь заяц будет убит. Доказательство содержится в следующей лемме.

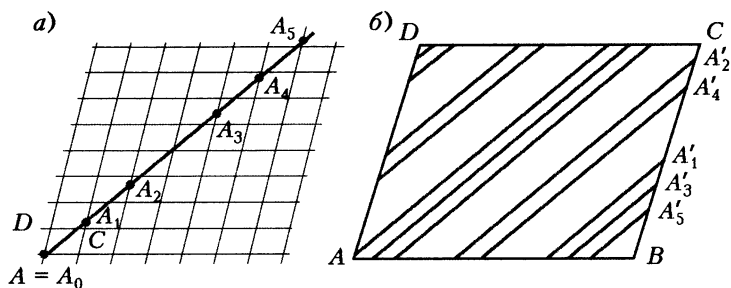


Рис. 3

5° (*Лемма об охотнике и зайцах*). Пусть луч l проходит через узел A некоторой решетки. Тогда найдется такой узел, расстояние от которого до луча l будет меньше любого наперед заданного числа ϵ .

Доказательство. Обозначим точки пересечения луча l с наклонными прямыми сетки через $A_0 = A, A_1, A_2, \dots, A_n \dots$ (см. рис.3). Совместим все параллелограммы, на правых сторонах которых лежат эти точки, с параллелограммом $ABCD$, тогда каждая точка A_n перейдет в некоторую точку A'_n на стороне AB .

Для любого $\epsilon > 0$ найдутся такие точки A'_m и A'_{m+k} , что расстояние между ними будет меньше ϵ .

Докажите теперь, что расстояние от точки A_k до одного из узлов решетки меньше ϵ (в частности, если A'_m совпадает с A'_{m+k} , то A_k будет узлом решетки).

Следствие. Для любого иррационального числа $\alpha > 0$ и любого положительного ϵ найдутся такие натуральные m и n , что $|m\alpha - n| < \epsilon$.

Доказательство. Выберем на плоскости декартову систему координат и проведем прямую $y = \alpha x$. В силу иррациональности α , единственной точкой с целочисленными координатами на этой прямой будет начало координат. Прямая $y = \alpha x$ пересекает каждую вертикальную прямую $x = m$ в точке $(m; m\alpha)$. По лемме 5° найдется такой узел $(m; n)$ целочисленной решетки, что расстояние (по вертикали) от него до точки $(m; m\alpha)$ будет меньше ϵ , что и требовалось доказать.

Легко видеть, что среди всевозможных попарных расстояний между узлами любой решетки есть наименьшее (докажите!).

Это свойство вместе со свойством 2° решетки можно принять за определение решеток.

Теорема. Пусть множество M на плоскости обладает следующими свойствами:

а) расстояние между любыми двумя его точками не меньше некоторого положительного числа d ;

б) если три точки A, B, C множества M являются вершинами некоторого параллелограмма $ABCD$, то и четвертая вершина D этого параллелограмма принадлежит множеству M .

Тогда M – решетка.

Доказательство. Возьмем произвольную точку B , принадлежащую множеству M .

Пусть A – ближайшая к B точка из M (рис.4,а; такая точка существует, так как все попарные расстояния между точками множества M больше d).

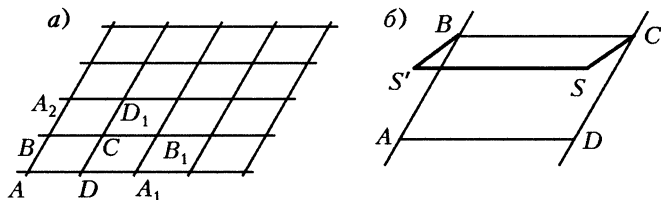


Рис. 4

Через точки A и B проведем прямую. Среди точек множества M , лежащих на этой прямой, выберем ближайшую к точке B – точку C – и построим параллелограмм $ABCD$. В силу свойства б) точка D также принадлежит множеству M .

Построим решетку, порождаемую параллелограммом $ABCD$. Докажем, что множество M совпадает с построенной решеткой.

Из свойства б) множества M следует, что все узлы этой решетки ему принадлежат

Упражнение 3. Докажите это.

Поэтому нужно только проверить, что ни на границе, ни внутри параллелограмма $ABCD$ нет точек множества M , отличных от его вершин.

Это почти очевидно: если точка S лежит внутри параллелограмма (рис.4,б), то хотя бы один из углов ASB, BSC, CSD и ASD будет тупым или прямым, и поэтому расстояние от S до одной из его вершин окажется меньше какой-нибудь его стороны (если S лежит на границе – то же самое); пусть, например, это расстояние SC . Построим параллелограмм $BCSS'$ (S' принадлежит M). Тогда BS' меньше либо BC , либо BA , но это противоречит выбору либо точки C , либо точки A .

Остальные случаи разберите самостоятельно.

Теорема доказана.

Упражнения

4. Пусть α – произвольное иррациональное число. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого действительного числа β найдутся такие целые числа m и n , что

$$|m\alpha + n - \beta| < \varepsilon.$$

5*. Докажите, что десятичная запись числа $2^?$ может начинаться с любой, наперед заданной комбинации цифр.

§2. Правильные многоугольники

Возьмем лист клетчатой бумаги. Понятно, что квадрат с вершинами в узлах такой решетки можно нарисовать многими способами (рис.5,а). А можно ли на клетчатой бумаге

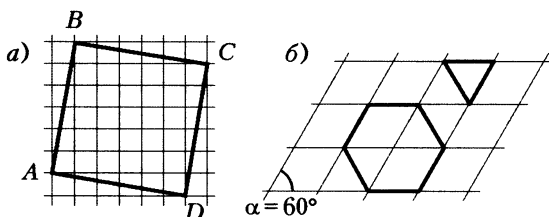


Рис. 5

нарисовать правильный треугольник? Правильный шестиугольник?

Оказывается, нельзя.

Упражнение 6. Докажите это.

В то же время легко построить решетку, на которую правильный треугольник уже можно «поместить» (рис.5,б).

Спрашивается, а как обстоят дела с остальными правильными многоугольниками? Существует ли, например, решетка, на которую можно было бы «поместить» правильный пятиугольник так, чтобы все его вершины оказались узлами этой решетки?

Оказывается, такой решетки нет. Действительно, предположим, что нам удалось построить решетку так, что вершины правильного пятиугольника оказались в ее узлах (рис.6). Проведем диагонали этого пятиугольника. По лемме 2 §1 точки пересечения диагоналей являются узлами решетки: каждая из них служит четвертой вершиной параллелограмма, три другие вершины которого – узлы решетки (точка A_1 , например, – вершина параллелограмма A_1CDE). Эти точки образуют правильный

пятиугольник со стороной в $k = \frac{A_1B_1}{AB}$ раз большей стороны исходного пятиугольника. Проведя диагонали нового пятиугольника, получим еще меньший пятиугольник с вершинами в узлах нашей решетки и так далее. В конце концов сторона пятиугольника станет меньше минимального расстояния между узлами решетки, а это находится в противоречии с тем, что вершины получающихся пятиугольников – узлы решетки.

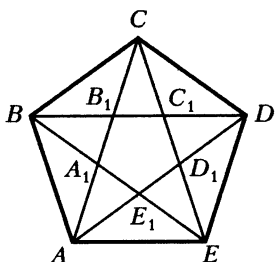


Рис. 6

Упражнение 7. Найдите k .

Итак, правильный пятиугольник не может быть «нарисован» ни на одной решетке.

Докажем, что точно так же обстоит дело и с остальными правильными q -угольниками при $q \geq 7$.

Доказательство основывается на той же идее; предполагается, что правильный q -угольник с вершинами в узлах решетки существует, и строится меньший q -угольник с вершинами в узлах. Затем процесс построения повторяется. В конце концов получается правильный q -угольник со стороной, меньшей минимального расстояния между узлами. Поэтому нам нужно только указать, как по данному правильному q -угольнику с вершинами в узлах решетки построить меньший правильный q -угольник, вершины которого будут также находиться в узлах нашей решетки.

Пусть A_1, A_2, \dots, A_q – узлы некоторой решетки, являющиеся вершинами правильного q -угольника, и пусть M – произвольный узел решетки (рис.7). Отложим от точки M отрезки $MA'_1, MA'_2, MA'_3, \dots, MA'_q$, равные, параллельные и так же направ-

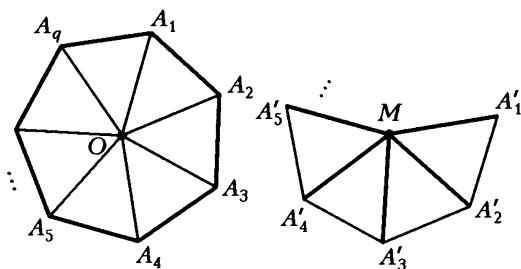


Рис. 7

ленные, как сторона $A_q A_1, A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{q-1} A_q$ нашего многоугольника. Точки $A'_1, A'_2, A'_3, \dots, A'_q$ – узлы решетки, так как каждая из них является четвертой вершиной параллелограмма, три другие вершины которого – узлы.

Легко видеть, что многоугольник $A'_1 A'_2 \dots A'_q$ – правильный, причем длина его стороны в $k_q = \frac{|A_1 A_2|}{|OA_1|}$ раз больше длины стороны исходного q -угольника.

Тем самым вопрос о правильных многоугольниках, «помещающихся» на точечных решетках, полностью решен: *такими многоугольниками являются только квадраты, правильные треугольники и правильные шестиугольники.*

Упражнения

8. Найдите k_q .

9. Существуют ли решетки, кроме целочисленной, на которые можно поместить квадрат?

10. Приведите пример решетки, отличной от изображенной на рисунке 5,6, на которую можно поместить правильный треугольник.

11. Существует ли решетка, на которую помещаются и квадрат, и правильный треугольник?

12. (Н.Б.Васильев). На плоскости проведены параллельные прямые на одинаковом расстоянии друг от друга («тетрадь в линейку»). Какие правильные n -угольники можно нарисовать на плоскости так, чтобы все их вершины лежали на проведенных прямых?

§3. Иррациональность значений тригонометрических функций

Сможете ли вы ответить на такой вопрос: рациональны или иррациональны числа $\sin 1^\circ, \cos \frac{\pi}{19}, \operatorname{tg} \frac{7}{55} \pi$? Или на такой: соизмеримы² ли числа π и $\arctg \frac{1}{3}$?

И вообще: для каких углов $\alpha = \frac{p}{q} \pi$ (p и q целые) будут рациональными числа: а) $\cos \alpha$; б) $\sin \alpha$; в) $\operatorname{tg} \alpha$?

Ясно, что $\cos \alpha$ рационален при $\alpha = \frac{k\pi}{2}$ и $\alpha = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$;

² Напомним, что два числа α и β называются соизмеримыми, если их отношение – рационально, т.е. если $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p}{q}$, где p и q – целые числа и $q > 0$.

$\sin \alpha$ – при $\alpha = \frac{k\pi}{2}$ и $\alpha = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$;

$\operatorname{tg} \alpha$ – при $\alpha = k\pi$ и $\alpha = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi$

(k – целое).

Мы увидим, что при остальных $\alpha = \frac{p}{q}\pi$ значения всех трех функций иррациональны.

Для доказательства нам понадобятся следующие простые факты из тригонометрии:

1. Для всякого натурального n функция $\cos nx$ является многочленом n -й степени от $\cos x$ с целыми коэффициентами, т.е. $\cos nx = P_n(\cos x)$, где $P_n(y)$ – многочлен с целыми коэффициентами степени n .

2. Функция $\sin nx$ является произведением функции $\sin x$ на некоторый многочлен степени $n - 1$, относительно $\cos x$, с целыми коэффициентами, т.е.

$$\sin nx = \sin x \cdot Q_{n-1}(\cos x),$$

где $Q_{n-1}(y)$ – многочлен с целыми коэффициентами степени $n - 1$.

Упражнение 13. Докажите эти утверждения.

Отметим простые следствия этих утверждений;

а) если $\cos x$ – рациональное число, то $\cos nx$ – тоже рациональное число, а числа $\sin x$ и $\sin nx$ соизмеримы (при $\sin nx \neq 0$);

б) если p и q взаимно простые числа и $\cos \frac{p}{q}\pi$ рациональное число, то число $\cos \frac{\pi}{q}$ также рационально.

Докажем б) (свойство а) очевидно).

Заметим, что если p и $q > 1$ взаимно просты, то существует такое натуральное число k , что число kp при делении на q дает в остатке 1, т.е. $kp = lq + 1$.

Упражнение 14. Докажите это.

Поэтому если число $\cos \frac{p}{q}\pi$ рационально, то рационально и число

$$\cos k \left(\frac{p}{q} \pi \right) = \cos \left(\frac{lq + 1}{q} \pi \right) = (-1)^l \cos \frac{\pi}{q}.$$

Если же рационально число $\cos \frac{\pi}{q}$, то рационально и $\cos \frac{p}{q}\pi$ при любом целом p (см. утверждение 1).

Итак, число $\cos \frac{p}{q} \pi$ при взаимно простых p и $q > 1$ рационально тогда и только тогда, когда рационален $\cos \frac{\pi}{q}$.

Теперь докажем, что $\cos \frac{\pi}{q}$ иррационален при всех натуральных $q > 3$. Предположим, что $\cos \frac{\pi}{q} = \frac{m_1}{n_1}$ — рациональное число (m_1 и n_1 — натуральные). Введем на плоскости декартову

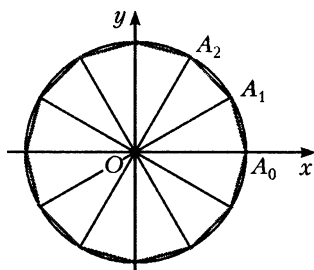


Рис. 8

систему координат и проведем лучи, образующие с положительным направлением оси x углы $0, \frac{\pi}{q}, \frac{2\pi}{q}, \dots, \frac{2q-1}{q} \pi$.

Пусть $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{2q-1}$ — точки пересечения этих лучей с единичной окружностью (рис.8). Многоугольник $A_0 A_1 A_2 \dots A_{2q-1}$ правильный; точка A_k имеет следующие

координаты: $\left(\cos \frac{k}{q} \pi, \sin \frac{k}{q} \pi \right)$. Так как $\cos \frac{\pi}{q}$ рационален, то абсцисса точки A_k — число рациональное:

$$\cos \frac{k}{q} \pi = p_k \left(\cos \frac{\pi}{q} \right) = \frac{m_k}{n_k};$$

ордината же ее равна произведению рационального числа $Q_k \left(\cos \frac{\pi}{q} \right) = \frac{r_k}{s_k}$ на число $\sin \frac{\pi}{q}$ (см. упражнения 13 и 14; $k = 1, 2, \dots, 2q-1$; координаты точки $A_0 = (1; 0)$). Итак,

$$A_k = \left(\frac{m_k}{n_k}; \frac{r_k}{s_k} \cdot \sin \frac{\pi}{q} \right).$$

Приведем все дроби $\frac{m_k}{n_k}, \frac{r_k}{s_k}$ к общему знаменателю; обозначим его через D . Тогда

$$A_k = \left(\frac{M_k}{D}, \frac{N_k}{D} \cdot \sin \frac{\pi}{q} \right),$$

M_k и N_k — целые, $k = 1, 2, \dots, 2q-1$.

Рассмотрим теперь все точки с координатами $\left(\frac{i}{D}; \frac{j}{D} \cdot \sin \frac{\pi}{q}\right)$ (i и j – целые) – эти точки образуют решетку (см. упражнение 2), причем вершины нашего правильного $2q$ -угольника $A_0 A_1 \dots A_{2q-1}$ являются ее узлами. Но этого не может быть (см. § 2), так как $2q \geq 8$. Поэтому наше предположение о том, что при $q > 3$ число $\cos \frac{\pi}{q}$ рационально, было неверным, и, следовательно, все числа $\cos \frac{p}{q} \pi$ ($q > 3$, p и q взаимно просты) иррациональны!

Упражнение 15. Пусть $q \geq 3$, p и q взаимно просты. Докажите, что

а) числа $\sin \frac{p}{q} \pi$ для $q \neq 6$ иррациональны;

б) то же для чисел $\operatorname{tg} \frac{p}{q} \pi$, если $q \neq 4$.

Полученные результаты можно сформулировать еще и так: числа $\arcsin \frac{p}{q}$, $\arccos \frac{p}{q}$ при $\frac{p}{q} \neq 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1$, а также числа $\operatorname{arctg} \frac{p}{q}$ при $\frac{p}{q} \neq 0, \pm 1$ (и взаимно простых p и q) несоизмеримы с числом π .

§ 4. Решение задачи M252

Итак, задача M252: а) *На плоскости лежит правильный восьмиугольник со стороной a . Его разрешается «перекачивать» по плоскости, переворачивая (симметрично отражая) относительно любой стороны. Докажите, что для любой точки A плоскости и любого $\epsilon > 0$ можно перекатить восьмиугольник в такое положение, что центр его будет находиться от точки A на расстоянии меньше ϵ .*

б) *Решите аналогичную задачу для правильного пятиугольника.*

в) *Для каких правильных q -угольников верно аналогичное утверждение?*

Мы приведем два решения этой задачи. Первое решение опирается на иррациональность чисел $\cos \frac{2\pi}{q}$ при $q > 4$, $q \neq 6$.

Второе основывается на теореме, доказанной в § 1.

Прежде всего заметим, что утверждение задачи не справедливо для правильных треугольника и шестиугольника, а также и для квадрата: в этих случаях точки, в которые попадает центр

соответствующего многоугольника в результате «перекаtywаний», образуют решетку (докажите это!). Оказывается, что для всех остальных правильных q -угольников утверждение задачи верно — мы докажем, что каковы бы ни были точка A и $\varepsilon > 0$, центр любого правильного q -угольника при $q \neq 3$, $q \neq 4$, $q \neq 6$ после некоторого количества «перекаtywаний» попадает в круг радиуса ε с центром в точке A .

Прежде чем приступать к доказательству, выясним некоторые свойства множества M тех точек плоскости, в которые переходит центр правильного q -угольника P после четного числа «перекаtywаний». Заметим, что q -угольник P' , получающийся из P после четного числа «перекаtywаний», расположен таким образом, что его стороны параллельны сторонам исходного. Поэтому мы можем считать, что P' получен из P параллельным переносом.

Лемма 1. Если три вершины параллелограмма A , B и C принадлежат M , то и четвертая его вершина D также принадлежит M .

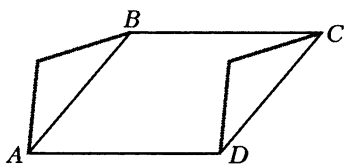


Рис. 9

Доказательство. Пусть точки A , B и C принадлежат M (рис.9) и D — четвертая вершина параллелограмма. Ясно, что мы можем пройти из точки C в точку D , осуществляя те же параллельные переносы, что и при переходе из точки B в точку A .

Лемма 2. Множество M переходит в себя при повороте на угол $\frac{2\pi}{q}$ вокруг любой из его точек.

Доказательство. Построим цепочку q -угольников, примыкающих друг к другу по стороне и «соединяющих» наш q -угольник с центром в заданной точке O с q -угольником с центром в любой другой точке A множества M (рис.10). При повороте на угол $\frac{2\pi}{q}$ вокруг точки O эта цепочка многоугольников переходит в другую цепочку, соединяющую исходный многоугольник с многоугольником, центром которого является точка A' , полученная из A поворотом. Следовательно, точка A' также принадлежит множеству M .

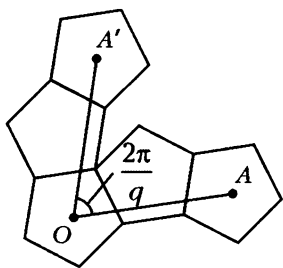


Рис. 10

Перейдем к доказательству сделанного утверждения.

Первое доказательство. Разберем сначала случай правильного восьмиугольника. (Будем считать, что апофема многоугольника равна 1.)

Введем на плоскости систему координат так, как показано на рисунке 11, и посмотрим, что происходит с координатами центров при «перекачивании» через стороны многоугольника P .

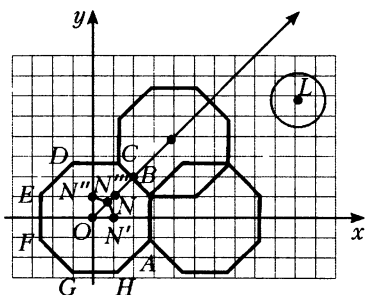


Рис. 11

При «перекачивании» вдоль оси Ox ординаты центров не меняются, а абсциссы увеличиваются или уменьшаются на 2. При перекачивании вдоль биссектрисы первого координатного угла координаты точек либо увеличиваются, либо уменьшаются на $\sqrt{2}$.

Если сделать n шагов вдоль этой биссектрисы вправо – вверх, затем m шагов вдоль оси Ox влево и m шагов вдоль оси Oy вниз, то мы попадем в точку N с координатами $((n\sqrt{2} - 2m; n\sqrt{2} - 2m)$ (см. рис.11); так как $\sqrt{2}$ – число иррациональное, то (см. §1) найдутся такие натуральные m и n , что

$$0 < n\sqrt{2} - 2m < \frac{\varepsilon}{4}, \quad (*)$$

где ε – любое положительное число.

Отметим, что мы можем также придти в точку N' , получающуюся из N поворотом на угол 45° по часовой стрелке, и в точку N'' , получающуюся из N поворотом на угол 45° против часовой стрелки.

Достроим треугольник $ON'N''$ до квадрата $ON'N''N'''$ и рассмотрим решетку, им порождаемую.

Так как стороны и диагонали квадрата $ON'N''N'''$ меньше ε (см. (*) и рисунок 11), то во всяком круге L радиуса ε окажется хотя бы один узел решетки. Но по лемме 1 все узлы этой решетки можно получить «перекачиванием» из центра восьмиугольника.

Тем самым про восьмиугольник все доказано.

Для остальных многоугольников (конечно, правильных) доказательство проводится по той же схеме.

Второе решение. Это решение несколько короче первого и, пожалуй, нагляднее, но оно использует трудную теорему из §1.

Как мы видели, достаточно доказать, что во множестве M найдутся сколь угодно близкие точки.

Предположим, что это не так, т.е. предположим, что расстояния между точками множества M больше некоторого положительного числа d .

В силу теоремы из § 1 и лемм 1 и 2 множество M является решеткой, которая, к тому же, переходит в себя при повороте на угол $\frac{2\pi}{q}$. Из этого немедленно следует, что существует правильный q -угольник с вершинами в ее узлах, а это возможно лишь при $q = 3$, $q = 4$ или $q = 6$. Решение закончено.

1. Простой пример

Для приближенного вычисления квадратного корня из положительного числа a поступают следующим образом. В качестве первого приближения берут произвольное число $a_0 > \sqrt{a}$. Следующее приближение a_1 находят по формуле

$$a_1 = \frac{1}{2} \left(a_0 + \frac{a}{a_0} \right),$$

по a_1 находят a_2 :

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{a}{a_1} \right)$$

и вообще

$$a_n = \frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{a}{a_{n-1}} \right).$$

Последовательность $\{a_n\}$ монотонно убывает и ограничена. По теореме Вейерштрасса она имеет предел. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$. Тогда $s > 0$ и $s = \frac{1}{2} \left(s + \frac{a}{s} \right)$, т.е. $s^2 = a$, а так как $s > 0$, то $s = \sqrt{a}$.

Если взять достаточно большое n , то a_n будет достаточно мало отличаться от \sqrt{a} .

Упражнения

1. Докажите, что последовательность $\{a_n\}$ монотонно убывает.
2. Оцените разность $|a_n - \sqrt{a}|$.

Проанализируем наш способ вычисления последовательных приближений для \sqrt{a} . Последовательность приближений $\{a_n\}$ задавалась рекуррентно: $a_n = \varphi(a_{n-1})$, где $\varphi(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$. Установив сходимость последовательности $\{a_n\}$, мы заключили, что ее предел s удовлетворяет равенству $s = \frac{1}{2} \left(s + \frac{a}{s} \right)$, т.е.

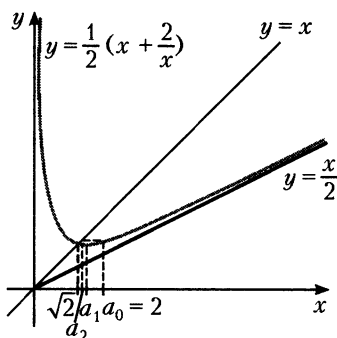


Рис. 1

является корнем уравнения

$$\varphi(x) = x. \quad (1)$$

На рисунке 1 изображен график функции $y = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$, $x > 0$, и показаны три первых члена последовательности

$$\begin{cases} a_0 = 2, \\ a_n = \frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}} \right). \end{cases}$$

Упражнение 3. Выразите a_n через n , если $a_0 = 1$ и а) $a_n = a \cdot a_{n-1}$;

б) $a_n = a^{a_{n-1}}$; в) $a_n = \sqrt{a + a_{n-1}}$; г) $a_n = \frac{a_{n-1}}{\sqrt{1 + a_{n-1}^2}}$; д*) $a_n = \frac{1}{1 + a_{n-1}}$.

2. Уравнения и пределы

Пусть нам нужно решить уравнение (1), где φ – некоторая функция. Возьмем произвольное число $a_0 \in D(\varphi)$ и определим рекуррентно последовательность $\{a_n\}$: $a_n = \varphi(a_{n-1})$. Предположим, что $a_n \in D(\varphi)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. Если последовательность $\{a_n\}$ сходится к s и функция φ непрерывна при $x = s$, то s является корнем уравнения (1).

Эта теорема и была фактически применена в п.1. Выбор первого приближения (или «нулевого члена» последовательности) диктуется соображениями удобства – a_0 естественно брать поближе к искомому корню.

Как будет видно из дальнейшего, умение исследовать разрешимость уравнения (1) позволяет иногда решить вопрос о сходимости соответствующей последовательности $\{a_n\}$.

Упражнения

4. Исследуйте сходимость последовательностей:

а) $a_n = \sqrt{a + a_{n-1}}$, $a_0 = 0$;

б) $a_n = \sin a_{n-1}$, $a_0 = a \in (0; \pi)$;

в) $a_n = \frac{1}{1 + a_{n-1}}$, $a_0 = 1$.

5. Укажите способ нахождения положительного корня уравнения

$$x^3 - x - 1 = 0. \quad (1)$$

6 (способ приближенного вычисления $\sqrt[3]{a}$). Последовательность $\{a_n\}$ строится по следующему правилу:

$$\begin{cases} a_0 = a > 0, \\ a_n = \frac{1}{3} \left(2a_{n-1} + \frac{a}{a_{n-1}^2} \right). \end{cases}$$

Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt[3]{a}$.

7. Пусть $a > 0$, $b > 0$, $p > 0$, $q > 0$. Рассмотрим последовательность

$$\frac{a}{b}, \frac{b}{pa + qb}, \frac{pa + qb}{pb + q(pa + qb)}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots,$$

где $a_{n+1} = b_n$, $b_{n+1} = pa_n + qb_n$. Существует ли у этой последовательности предел? (Эту задачу предложил наш читатель В. Фищук.)

3. Главный пример

Остальная часть статьи посвящена вопросу о сходимости последовательности

$$\begin{cases} \alpha_0 = 1, \\ \alpha_n = a^{\alpha_{n-1}}, \end{cases} \quad (2)$$

т.е. $1, a, a^a, a^{a^a}, \dots$. Эта сходимость зависит, конечно, от параметра a .

Оказывается, для больших a выяснить существование предела сравнительно легко, а для маленьких — гораздо труднее. Приведем несколько примеров.

При $a = 2$ получаем последовательность

$$1; 2; 4; 16; 65536; \dots$$

(она, очевидно, расходится).

При $a = 1,5$ — последовательность

$$1; 1,5; 2,106; 2,349; 2,592; \dots;$$

$$\alpha_{11} \approx 10,99; \alpha_{12} \approx 86,163; \alpha_{13} > 10^{16}$$

(она тоже расходится, но здесь с самого начала это далеко не так очевидно).

При $a = \sqrt{2} = 1,4142\dots$ — последовательность

$$1; \sqrt{2}; 1,632; 1,761; \dots; \alpha_8 \approx 1,966; \alpha_{25} \approx 1,9999$$

(тут, как мы увидим, предел существует и равен 2).

При $a = 1$

1, 1, 1, ...

(предел, очевидно, существует и равен 1).

При $a = 0,5$

1; 0,5; 0,707; 0,613; 0,654; ...;

$\alpha_{12} \approx 0,641206$; $\alpha_{13} \approx 0,641177$.

При $a = 0,01$

1; 0,01; 0,955; 0,0123; 0,945; 0,013; ...;

$\alpha_{15} \approx 0,013$; $\alpha_{16} \approx 0,941$

(поведение двух последних последовательностей мы прокомментируем в конце статьи).

Из теоремы 1 мы знаем, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = s$, то s является корнем уравнения

$$a^x = x \quad (3)$$

(функция $x \rightarrow a^x$ непрерывна во всех точках числовой прямой). Следовательно, если уравнение (3) при некотором a не имеет корней, то соответствующая последовательность (2) расходится.

На рисунке 2 изображен график функции $y = a^x$ и первые члены последовательности (2) – при $a > 1$ и предположении, что уравнение (3) имеет корни; на рисунке 3 – то же при $0 < a < 1$.

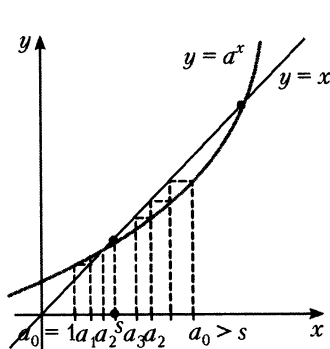


Рис. 2

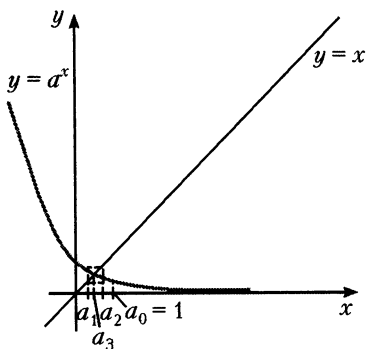


Рис. 3

4. $a > 1$

При $a > 1$ последовательность (2) монотонно возрастает (проверьте!).

Теорема 2. При $a > 1$ последовательность (2) сходится тогда и только тогда, когда уравнение (3) имеет хотя бы один корень. В этом случае ее предел равен меньшему из корней уравнения (3).

Доказательство. Мы только что отмечали, что если последовательность (2) сходится, то ее предел является корнем уравнения (3). Пусть теперь уравнение (3) имеет корни. Обозначим через s_0 наименьший корень. Покажем, что $\alpha_n < s_0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Легко видеть, что $s_0 > 1 - \alpha_0$. Если же $s_0 > \alpha_n$, то $s_0 = a^{s_0} > a^{\alpha_n} = \alpha_{n+1}$. Из теоремы Вейерштрасса следует, что последовательность (2) сходится, причем, очевидно, к s_0 . Теорема доказана.

5. $0 < a < 1$

В этом случае последовательность (2) ограничена: $0 < \alpha_n < 1$. К сожалению, она не монотонна. В самом деле, поскольку $0 < a < 1$, функция $y = a^x$ убывает, и $\alpha_2 = a^a < 1 = \alpha_0$, следовательно, $\alpha_3 = a^{a^a} > a^1 = a$, т.е. $\alpha_3 > \alpha_1$. Далее, $\alpha_4 = a^{\alpha_3} < a^{\alpha_1} = \alpha_2$, т.е. $1 = \alpha_0 > \alpha_2 > \alpha_4$. Пользуясь методом математической индукции, легко доказать, что подпоследовательность $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \dots, \alpha_{2n-1}, \dots$ нашей последовательности монотонно возрастает, а подпоследовательность $\alpha_0, \alpha_2, \alpha_4, \dots, \alpha_{2n}, \dots$ монотонно убывает. При этом всегда $\alpha_{2n} > \alpha_{2n-1}$. По теореме Вейерштрасса каждая из этих подпоследовательностей имеет предел. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{2n-1} = s_1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{2n} = s_2$. Ясно, что $s_2 \geq s_1$ и последовательность (2) будет сходящейся в том и только в том случае, когда $s_1 = s_2$ (докажите это!).

Что можно сказать про числа s_1 и s_2 ? Поскольку $\alpha_{2n+2} = a^{\alpha_{2n}}$, $\alpha_{2n+1} = a^{\alpha_{2n-1}}$ и функция $x \rightarrow a^{a^x}$ непрерывна во всех точках числовой прямой, числа s_1 и s_2 являются корнями уравнения

$$a^{a^x} = x. \quad (4)$$

Теорема 3. Числа s_1 и s_2 являются, соответственно, меньшим и большим корнями уравнения (4).

Доказательство. Пусть s — произвольный корень уравнения (4). Для доказательства теоремы достаточно установить, что $\alpha_{2n-1} < s < \alpha_{2n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Прежде всего заметим, что $s < 1$. В самом деле, если $s \geq 1$, то, ввиду $a^s > 0$, $a^{a^s} < 1$, т.е. $a^{a^s} \neq s$. Кроме того, очевидно, $s > 0$. Из $0 < s < 1$ следует $a^0 > a^s > a^1$, т.е. $a_0 > a^s > \alpha_1$. Значит,

$a^{\alpha_0} < a^{a^s} < a^{\alpha_1}$, т.е. $\alpha_1 < s < \alpha_2$. Индукционный шаг проделывается аналогично.

Следствие 1. Если уравнение (4) имеет более одного корня, то последовательность (2) расходится.

Следствие 2. Если уравнение (4) имеет ровно один корень, то последовательность (2) сходится, и предел этой последовательности есть корень уравнения (3).

Легко видеть, что всякий корень уравнения (3) удовлетворяет также и уравнению (4). Но при $0 < a < 1$ уравнение (3), очевидно, имеет корень (нарисуйте графики!). Значит, при таких a и уравнение (4) обязательно имеет хотя бы один корень.

Упражнение 8. Рассмотрим последовательность $\alpha_0 = x > 0$, $\alpha_n = a^{\alpha_{n-1}}$. При каких x эта последовательность сходится? (Рассмотрите отдельно случаи $a > 1$ и $0 < a < 1$.)

Итак, вопрос о сходимости последовательности (2) сводится к вопросу о числе корней уравнения (3) при $a > 1$ и уравнения (4) – при $0 < a < 1$.

6. Исследование уравнения (3) при $a > 1$

Уравнение (3) равносильно уравнению

$$\frac{\ln x}{x} = \ln a. \quad (5)$$

Построим график функции $y = \frac{\ln x}{x}$ (рис.4). Эта функция определена при $x > 0$, достигает максимума, равного $1/e$, при $x = e$, убывает при $x > e$ и возрастает при $0 < x < e$.

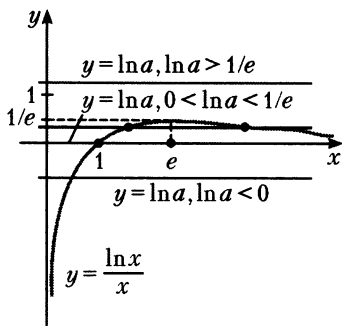


Рис. 4

Упражнение 9. Проведите подробное исследование функции

$$y = \frac{\ln x}{x}.$$

Следовательно, при $\ln a > 1/e$, т.е. $a > e^{1/e}$, уравнение (5) корней не имеет.

При $0 < \ln a < 1/e$, т.е. $1 < a < e^{1/e}$, уравнение (5) имеет два корня.

При $a = e^{1/e}$ оно имеет один корень.

Заметим для дальнейшего, что при $\ln a \leq 0$, т.е. $0 < a \leq 1$, уравнение (5) имеет единственный корень.

7. Исследование уравнения (4) при $0 < a < 1$

Мы уже знаем, что все корни уравнения (4) заключены в интервале $(0; 1)$. Уравнение (4) равносильно уравнениям $a^x = \log_a x$, $x = \log_a \log_a x$ или $x = \frac{1}{\ln a} \ln \frac{\ln x}{\ln a}$. Обозначим через φ функцию

$$\varphi(x) = \frac{1}{\ln a} \ln \frac{\ln x}{\ln a} - x.$$

Мы хотим выяснить, сколько корней в зависимости от параметра a имеет уравнение $\varphi(x) = 0$, равносильное уравнению (4). Чтобы это сделать, нужно посчитать, сколько существует точек пересечения графика функции φ с осью абсцисс.

Прежде всего заметим, что к этим точкам пересечения заведомо принадлежит точка s_0 , где s_0 – единственный корень уравнений (3), (5), – см. замечания в конце пп.6 и 5.

Исследуем функцию φ .

Так как $\ln a < 0$, функция φ определена при $0 < x < 1$. При $x \rightarrow 0$ (справа) $\varphi(x) \rightarrow -\infty$; при $x \rightarrow 1$ (слева) $\varphi(x) \rightarrow +\infty$.

Найдем экстремумы функции φ ; для этого исследуем ее производную:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x \ln x \ln a} - 1.$$

Приравняв ее к нулю, мы получим уравнение

$$x \ln x = \frac{1}{\ln a}.$$

На рисунке 5 изображен график функции $y = x \ln x$.

Упражнение 10. Исследуйте функцию $y = x \ln x$ и постройте ее график.

Мы видим, что при $x = 1/e$ функция $y = x \ln x$ достигает минимума, равного $-1/e$. Поэтому, если $1/\ln a < -1/e$, т.е. $\ln a > -e$ или

$a > e^{-e}$, то уравнение (6) корней не имеет. Так что при $e^{-e} < a < 1$ производная функции φ строго больше нуля, т.е. при таких значениях a функция φ строго возрастает. Значит, уравнение $\varphi(x) = 0$ при $e^{-e} < a < 1$ имеет единственный корень s_0 (примерный график функции φ для $e^{-e} < a < 1$ изображен на рисунке 6).

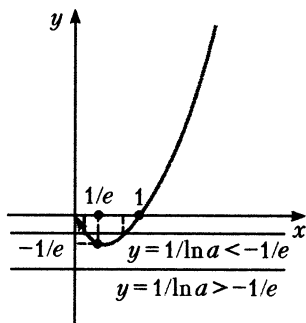


Рис. 5

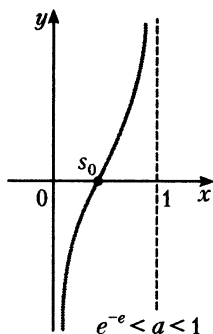


Рис. 6

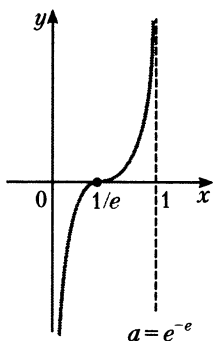


Рис. 7

Если $a = e^{-e}$, то $\varphi'(x) = 0$ при $x = 1/e$ и $\varphi'(x) > 0$ при всех остальных $x \in (0; 1/e) \cup (1/e; 1)$.

В этом случае φ тоже строго возрастает во всей области определения, и уравнение $\varphi(x) = 0$ по-прежнему имеет единственный корень $x = 1/e$ (график функции φ для $a = e^{-e}$ изображен на рисунке 7).

Итак, если $e^{-e} \leq a < 1$, уравнение (4) имеет ровно один корень.

Если же $0 < a < e^{-e}$, то уравнение (6) имеет два корня: x_1 и x_2 (см. рис.5). Причем при $x \in (0; x_1) \cup (x_2; 1)$ производная $\varphi'(x)$ положительна, а при $x \in (x_1; x_2)$ — отрицательна, так что x_1 — точка максимума, а x_2 — точка минимума функции φ ; значит, φ при $x \in (x_1; x_2)$ возрастает и при $x \in (x_2; 1)$ возрастает, а при $x \in (0; x_1)$ убывает (разберитесь в этом!).

Покажем теперь, что $s_0 \in (x_1; x_2)$. Для этого достаточно доказать, что $\varphi'(s_0) < 0$. Имеем

$$\varphi'(s_0) = \frac{1}{s_0 \ln s_0 \ln a} - 1 = \frac{1}{(\ln s_0)^2} - 1$$

(так как $\frac{\ln s_0}{s_0} = \ln a$). Докажем, что $\ln s_0 < -1$ (тогда $\varphi'(s_0) < 0$). Для этого обратимся вновь к функции $y = \frac{\ln x}{x}$ (см. рис.4). Поскольку она при $0 < x < 1$ возрастает, а $\ln a < -e$, корень s_0 уравнения (5) лежит левее корня уравнения $\frac{\ln x}{x} = -e$, т.е. левее точки e^{-1} . Значит, $s_0 < 1/e$ и $\ln s_0 < -1$.

Итак, про функцию φ нам теперь известно, что

- 1) $\varphi(x) \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow 0$;
- 2) $\varphi(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow 1$;
- 3) φ возрастает на промежутке $(0; x_1)$, в точке x_1 имеет максимум, убывает на промежутке $(x_1; x_2)$, в точке x_2 имеет минимум и снова возрастает на промежутке $(x_2; 1)$;
- 4) φ обращается в нуль в точке s_0 промежутка $(x_1; x_2)$.

Этих сведений достаточно, чтобы нарисовать примерный график функции φ для $0 < a < e^{-e}$; мы видим, что он пересекает

ось абсцисс, кроме точки s_0 , еще в двух точках s_1 и s_2 (рис.8), так что в случае $0 < a < e^{-e}$ уравнение $\varphi(x) = 0$, а следовательно, и уравнение (4) имеет три корня: $s_1 < s_0 < s_2$.

Вопрос об уравнении $a^x = \log_a x$ в «Кванте» уже обсуждался. В частности, разбиралось уравнение $(1/16)^x = \log_{1/16} x$. Из нашего исследования следует, что у этого уравнения ровно три корня. Два из них легко найти подбором: $x_1 = 1/4$ и $x_2 = 1/2$.

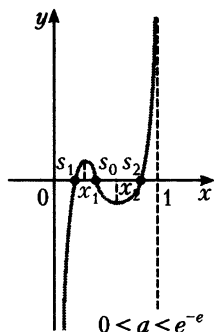


Рис. 8

Упражнение 11. Исследуйте разрешимость уравнений в зависимости от параметра a :

- 1) $x^2 - 3x^2 + a = 0$; 2) $x^4 - ax + 1 = 0$;
- 3) $a^x = x^2$; 4) $a^x = 2x + 1$; 5) $\cos x \cos 3x = a$, $x \in (0; \pi)$.

8. Подведем итог

Теорема 4. Последовательность (2) сходится тогда и только тогда, когда

$$(1/e)^e \leq a \leq e^{1/e}$$

[$(1/e)^e = 0,065988\dots$; $e^{1/e} = 1,444668\dots$; случай $a = 1$ очевиден].

Возвращаясь к последовательностям, с которых мы начинали п.3, мы можем теперь сказать:

при $a = 2, 1,5$ и $0,01$ последовательность (2) расходится;

при $a = \sqrt{2}$ и $0,5$ последовательность (2) сходится.

СОДЕРЖАНИЕ

От составителей	3
А.Н.Колмогоров в воспоминаниях учеников	5
Беседа с Андреем Николаевичем Колмогоровым	18
О профессии математика. <i>А.Колмогоров</i>	24
Что такое функция? <i>А.Колмогоров</i>	35
Путь в математику открыт. <i>А.Колмогоров</i>	48
Много битов из ничего. <i>С.Артемов, Ю.Гиматов, В.Федоров</i>	50
Окружности на решетках. <i>В.Вавилов, А.Устинов</i>	56
Две знаменитые формулы. <i>В.Вавилон, А.Устинов</i>	67
Легко ли складывать и умножать дроби. <i>С.Гашков</i>	80
Оптическое изображение и проективная плоскость. <i>В.Дубровский, Я.Сморodinский</i>	90
Ловушка для треугольника. <i>В.Дубровский, В.Сендеров</i>	104
Решетки и правильные многоугольники. <i>А.Егоров</i>	116
Уравнения и пределы. <i>А.Егоров</i>	129

КОЛМОГОРОВСКОЙ ШКОЛЕ – ПЯТЬДЕСЯТ

Сборник статей

Часть 1

Составители В.В.Вавилов, В.Н.Дубровский, А.А.Егоров

Библиотечка «Квант». Выпуск 131

Приложение к журналу «Квант» №3/2014

Редактор *А.Ю.Котова*

Обложка *А.Е.Пацхверия*

Макет и компьютерная верстка *Е.В.Морозова*

Компьютерная группа *М.Н.Грицук, Е.А.Митченко*

Формат 84×108 1/32. Бум. офсетная. Гарнитура кудряшевская

Печать офсетная. Объем 4,5 печ.л. Тираж: 1-й завод 900 экз.

Заказ № 8985

119296 Москва, Ленинский пр., 64-А, «Квант»

Тел.: (495)930-56-48, e-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано «ТДДС-СТОЛИЦА-8»

Тел.: 8(495)363-48-86, <http://capitalpress.ru>

ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ КНИГИ СЕРИИ «БИБЛИОТЕЧКА «КВАНТ»

1. *М.П.Бронштейн*. Атомы и электроны
2. *М.Фарадей*. История свечи
3. *О.Оре*. Приглашение в теорию чисел
4. Опыты в домашней лаборатории
5. *И.Ш.Слободецкий, Л.Г.Асламазов*. Задачи по физике
6. *Л.П.Мочалов*. Головоломки
7. *П.С.Александров*. Введение в теорию групп
8. *В.Г.Штейнгауз*. Математический калейдоскоп
9. Замечательные ученые
10. *В.М.Глушков, В.Я.Валах*. Что такое ОГАС?
11. *Г.И.Копылов*. Всего лишь кинематика
12. *Я.А.Сморodinский*. Температура
13. *А.Е.Карпов, Е.Я.Гик*. Шахматный калейдоскоп
14. *С.Г.Гиндикин*. Рассказы о физиках и математиках
15. *А.А.Боровой*. Как регистрируют частицы
16. *М.И.Каганов, В.М.Цукерник*. Природа магнетизма
17. *И.Ф.Шарыгин*. Задачи по геометрии: планиметрия
18. *Л.В.Тарасов, А.Н.Тарасова*. Беседы о преломлении света
19. *А.Л.Эфрос*. Физика и геометрия беспорядка
20. *С.А.Пикин, Л.М.Блинов*. Жидкие кристаллы
21. *В.Г.Болтянский, В.А.Ефремович*. Наглядная топология
22. *М.И.Башмаков, Б.М.Беккер, В.М.Гольховой*. Задачи по математике: алгебра и анализ
23. *А.Н.Колмогоров, И.Г.Журбенко, А.В.Прохоров*. Введение в теорию вероятностей
24. *Е.Я.Гик*. Шахматы и математика
25. *М.Д.Франк-Каменецкий*. Самая главная молекула
26. *В.С.Эдельман*. Вблизи абсолютного нуля
27. *С.Р.Филонович*. Самая большая скорость
28. *Б.С.Бокштейн*. Атомы блуждают по кристаллу
29. *А.В.Бялко*. Наша планета – Земля
30. *М.Н.Аршинов, Л.Е.Садовский*. Коды и математика
31. *И.Ф.Шарыгин*. Задачи по геометрии: стереометрия
32. *В.А.Займовский, Т.Л.Колупаева*. Необычные свойства обычных металлов
33. *М.Е.Левинштейн, Г.С.Симин*. Знакомство с полупроводниками

34. *В.Н.Дубровский, Я.А.Сморodinский, Е.Л.Сурков.* Релятивистский мир
35. *А.А.Михайлов.* Земля и ее вращение
36. *А.П.Пурмаль, Е.М.Слободецкая, С.О.Травин.* Как превращаются вещества
37. *Г.С.Воронов.* Штурм термоядерной крепости
38. *А.Д.Чернин.* Звезды и физика
39. *В.Б.Брагинский, А.Г.Полнарев.* Удивительная гравитация
40. *С.С.Хилькевич.* Физика вокруг нас
41. *Г.А.Звенигородский.* Первые уроки программирования
42. *Л.В.Тарасов.* Лазеры: действительность и надежды
43. *О.Ф.Кабардин, В.А.Орлов.* Международные физические олимпиады школьников
44. *Л.Е.Садовский, А.Л.Садовский.* Математика и спорт
45. *Л.Б.Окунь.* α , β , γ ... Z: элементарное введение в физику элементарных частиц
46. *Я.Е.Гегузин.* Пузыри
47. *Л.С.Марочник.* Свидание с кометой
48. *А.Т.Филиппов.* Многоликий солитон
49. *К.Ю.Богданов.* Физик в гостях у биолога
50. Занимательно о физике и математике
51. *Х.Рачлис.* Физика в ванне
52. *В.М.Липунов.* В мире двойных звезд
53. *И.К.Кикоин.* Рассказы о физике и физиках
54. *Л.С.Понтрягин.* Обобщения чисел
55. *И.Д.Данилов.* Секреты программируемого микрокалькулятора
56. *В.М.Тихомиров.* Рассказы о максимумах и минимумах
57. *А.А.Силин.* Трение и мы
58. *Л.А.Ашкинази.* Вакуум для науки и техники
59. *А.Д.Чернин.* Физика времени
60. Задачи московских физических олимпиад
61. *М.Б.Балк, В.Г.Болтянский.* Геометрия масс
62. *Р.Фейнман.* Характер физических законов
63. *Л.Г.Асламазов, А.А.Варламов.* Удивительная физика
64. *А.Н.Колмогоров.* Математика – наука и профессия
65. *М.Е.Левинштейн, Г.С.Симин.* Барьеры: от кристалла до интегральной схемы
66. *Р.Фейнман.* КЭД – странная теория света и вещества
67. *Я.Б.Зельдович, М.Ю.Хлопов.* Драма идей в познании природы
68. *И.Д.Новиков.* Как взорвалась Вселенная
69. *М.Б.Беркинблит, Е.Г.Глаголева.* Электричество в живых организмах
70. *А.Л.Стасенко.* Физика полета

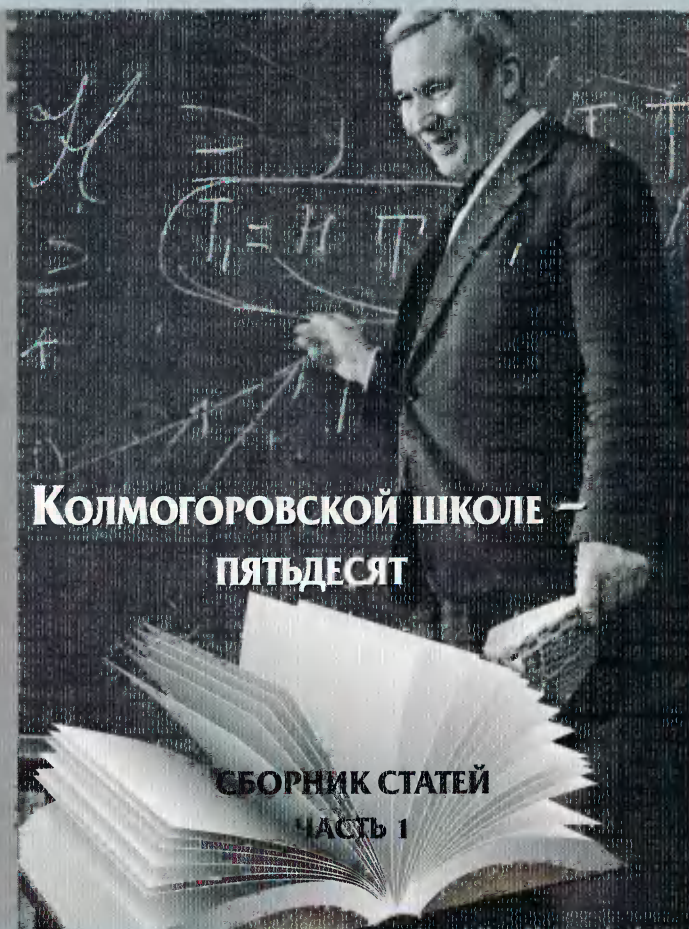
71. *А.С.Штейнберг*. Репортаж из мира сплавов
72. *В.Р.Полищук*. Как исследуют вещества
73. *Л.Кэрролл*. Логическая игра
74. *А.Ю.Гросберг, А.Р.Хохлов*. Физика в мире полимеров
75. *А.Б.Мигдал*. Квантовая физика для больших и маленьких
76. *В.С.Гетман*. Внуки Солнца
77. *Г.А.Гальперин, А.Н.Земляков*. Математические бильярды
78. *В.Е.Белонучкин*. Кеплер, Ньютон и все-все-все...
79. *С.Р.Филонович*. Судьба классического закона
80. *М.П.Бронштейн*. Солнечное вещество
81. *А.И.Буздин, А.Р.Зильберман, С.С.Кротов*. Раз задача, два задача...
82. *Я.И.Перельман*. Знаете ли вы физику?
83. *Р.Хонсбергер*. Математические изюминки
84. *Ю.Р.Носов*. Дебют оптоэлектроники
85. *Г.Гамов*. Приключения мистера Томпкинса
86. *И.Ш.Слободецкий, Л.Г.Асламазов*. Задачи по физике (2-е изд.)
87. Физика и...
88. *А.В.Спивак*. Математический праздник
89. *Л.Г.Асламазов, И.Ш.Слободецкий*. Задачи и не только по физике
90. *П.Гнэдиг, Д.Хоньек, К.Райли*. Двести интригующих физических задач
91. *А.Л.Стасенко*. Физические основы полета
92. Задачник «Кванта». Математика. Часть 1
93. Математические турниры имени А.П.Савина
94. *В.И.Белотелов, А.К.Звездин*. Фотонные кристаллы и другие метаматериалы
95. Задачник «Кванта». Математика. Часть 2
96. Олимпиады «Интеллектуальный марафон». Физика
97. *А.А.Егоров, Ж.М.Раббот*. Олимпиады «Интеллектуальный марафон». Математика
98. *К.Ю.Богданов*. Прогулки с физикой
99. *П.В.Блиох*. Радиоволны на земле и в космосе
100. *Н.Б.Васильев, А.П.Савин, А.А.Егоров*. Избранные олимпиадные задачи. Математика
101. У истоков моей судьбы...
102. *А.В.Спивак*. Арифметика
103. *Я.А.Сморodinский*. Температура (3-е изд.)
104. *А.Н.Васильев*. История науки в коллекции монет
105. *И.Ф.Акулич*. Королевские прогулки
106. Исаак Константинович Кикоин в жизни и в «Кванте»
107. *Г.С.Голицын*. Макро- и микромиры и гармония

108. *П.С.Александров*. Введение в теорию групп (2-е изд.)
109. *А.В.Спивак*. Арифметика-2
110. *П.Г.Крюков*. Лазер – новый источник света
111. *А.Б.Сосинский*. Узлы. Хронология одной математической теории
112. *А.П.Пятаков, П.П.Григал*. Лаборатория на коленке
113. *А.А.Заславский*. Олимпиады имени И.Ф.Шарыгина
114. *С.В.Коновалихин*. Сборник качественных задач по физике
115. *Е.Я.Гук*. Математика и шахматы
116. *Л.К.Белопухов*. Физика внезапного
117. *Н.Б.Васильев, А.А.Егоров*. Задачи всесоюзных математических олимпиад. Часть 1
118. Задачник «Кванта». Физика. Часть 1
119. *Н.Б.Васильев, А.А.Егоров*. Задачи всесоюзных математических олимпиад. Часть 2
120. Задачник «Кванта». Физика. Часть 2
121. *Н.Б.Васильев, В.Л.Гутенмахер, Ж.М.Раббот, А.Л.Тоом*. Заочные математические олимпиады
122. *А.З.Долгинов*. Строение материи: от атомов до Вселенной
123. Задачник «Кванта». Физика. Часть 3
124. *А.Толпыго*. 130 нестандартных задач
125. *Н.Б.Васильев*. Статьи из журнала «Квант». Часть 1
126. *Н.Б.Васильев*. Статьи из журнала «Квант». Часть 2
127. *Г.Е.Горелик*. Новые слова науки – от маятника Галилея до квантовой гравитации
128. *Е.Я.Гук*. Компьютерные шахматы
129. *М.И.Каганов*. Физика глазами физика. Часть 1
130. *М.И.Каганов*. Физика глазами физика. Часть 2

Индекс 90964



Библиотечка КВАНТ



**КОЛМОГОРОВСКОЙ ШКОЛЕ —
ПЯТЬДЕСЯТ**

**СБОРНИК СТАТЕЙ
ЧАСТЬ 1**

ВЫПУСК

131